Boletín de FICOM
Antes Boletín del Concurso de Primavera para Maestros
FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS
ACADEMIA MEXICANA DE CIENCIAS
Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Alicia Escalera, Marcela González.*
Boletín N.º 10 Marzo, 2001.

Suma de números cuadrados y suma de números triangulares

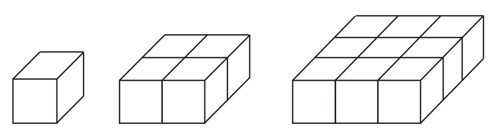
Es frecuente que entre los ejercicios que piden demostrar fórmulas por inducción matemática se incluya alguna, que si bien puede ser probada con este método sin mucho problema, deje a los alumnos con la sensación de que apareció de la nada y de que no tienen ni idea de cómo es que alguien pudo encontrar la fórmula. Tal es el caso de la fórmula para sumar números cuadrados y la fórmula para sumar números triangulares.

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

En este artículo se utilizan representaciones geométricas de las sumas para ayudar a entender de dónde sale cada fórmula y por qué se parecen tanto.

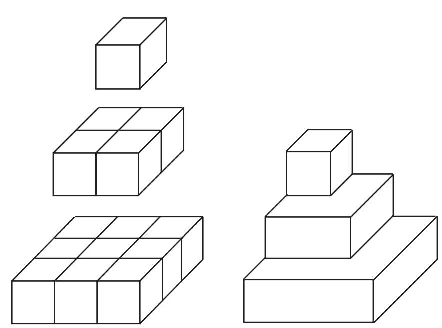
Suma de números cuadrados

Podemos representar los números cuadrados por medio de rebanadas formadas por pequeños cubos. El número representado es el total de cubos unitarios en cada rebanada.

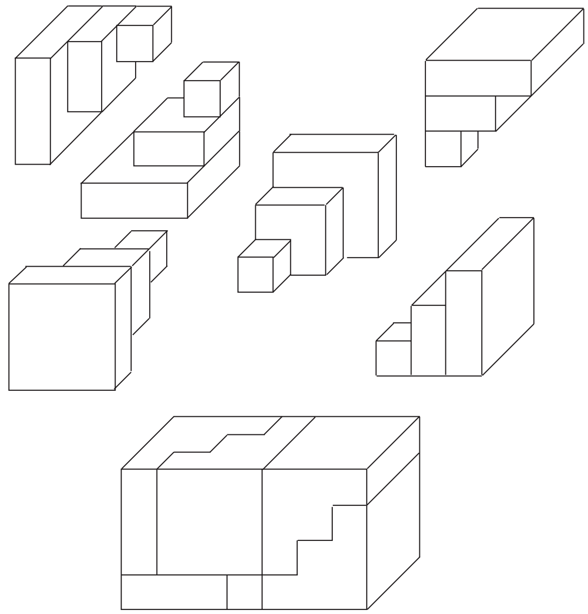


1 4 9

La suma de los números cuadrados se puede representar por medio de una pirámide escalonada.



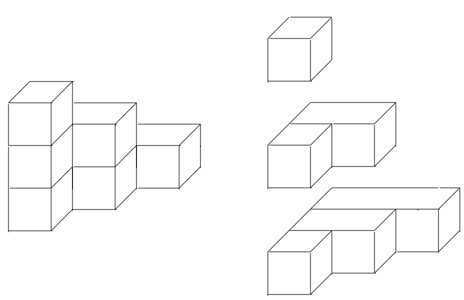
Con seis de estas pirámides podemos armar un ladrillo:



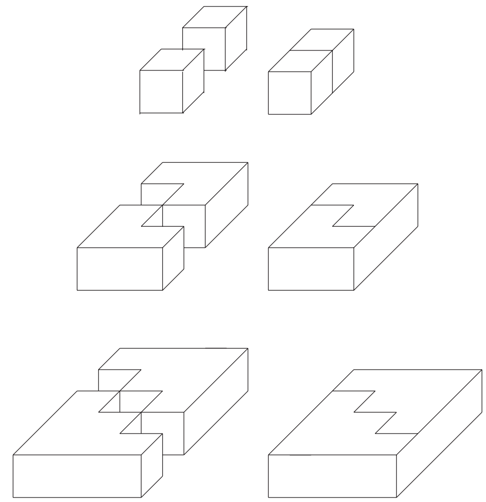
En este caso, en el que estamos sumando los primeros tres números cuadrados, las dimensiones del ladrillo son $3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1)$. Si sumamos n números cuadrados, las dimensiones del ladrillo serán $n \times (n+1) \times (2n+1)$. Como se necesitaron seis sumas de números cuadrados, la suma de los primeros n números cuadrados es por tanto $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Suma de números triangulares

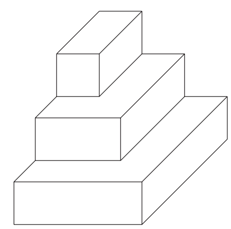
Los números triangulares $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ son las sumas de los primeros números naturales, $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Podemos representar la suma de números triangulares como un edificio escalonado donde cada piso es un número triangular.



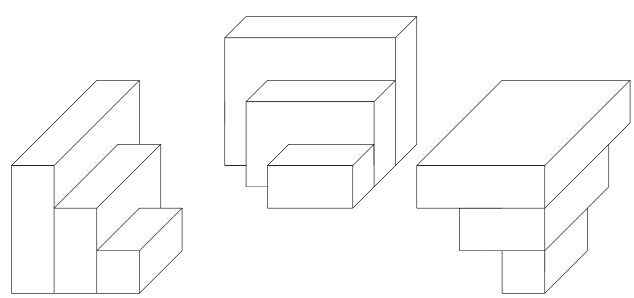
Podemos juntar dos copias de cada piso para formar pisos rectangulares (de grosor 1) en la forma mostrada. El piso de arriba tiene 1×2 cubos. El siguiente tiene 2×3 cubos, el siguiente 3×4, y el de hasta abajo tiene $n \times (n+1)$ cubos. De hecho, viendo cada uno de estos pisos podemos ver por qué $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

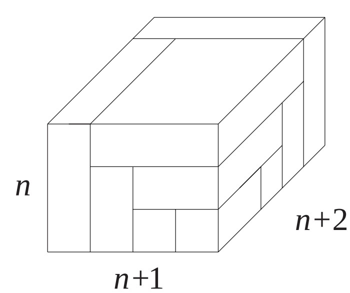


Podemos poner los pisos rectangulares unos sobre otros. Para formar una especie de pirámide escalonada.



Junta tres pirámides para formar un ladrillo de tamaño $n \times (n+1) \times (n+2)$. Necesitamos dos sumas de números triangulares para formar cada pirámide, y tres pirámides para formar el ladrillo. Por lo tanto la suma de los primeros n números triangulares está dada por $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.



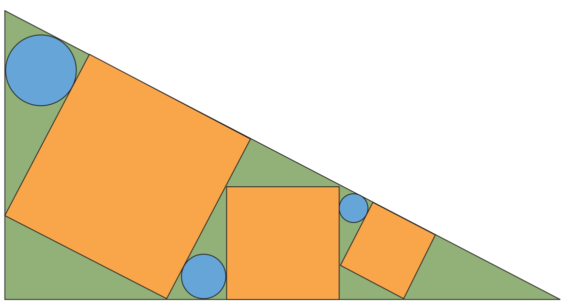


Alfinio Flores Peñafiel

Sangaku

Sangaku significa en japonés «tablilla matemática». Los sangaku eran en efecto tablillas con problemas geométricos que eran colocadas en los templos en Japón, principalmente durante el periodo Edo (1639–1854), durante el cual Japón vivió aislado de Occidente. Generalmente, estas tablillas no incluían solución alguna, al parecer como un reto a los lectores potenciales. La mayor parte de los sangaku presentan problemas de geometría euclidiana, pero los problemas son muy diferentes de aquellos a los que estamos habituados. Estos problemas se caracterizan por una armonía visual casi artística. Algunos problemas son relativamente elementales, mientras que otros parecen casi imposibles y sólo han podido ser resueltos con métodos avanzados, como geometría analítica y cálculo.

El siguiente es un ejemplo tomado de la revista Scientific American[1]. Fue escrito en una tablilla en la prefectura de Miyagi en 1913:



Se construyen tres cuadrados, como se indica en la figura, dentro de un triángulo rectángulo, y tres círculos inscritos en los triángulos que los cuadrados forman con el triángulo original. ¿Cuál es la relación entre los radios de los círculos?

[La solución está en la última página.]

Pueden encontrarse más referencias e imágenes de sangaku en la página de Internet:

`http://www.asahi-net.or.jp/~nj7h-ktr/english.html`

En este número del Boletín de FICOM, Angelo Barone habla de un problema de sangaku, y otros temas relacionados.

Óscar Chávez

Un problema de sangaku (¿1840?)

1. Hipocicloides y epicicloides.

Nota histórica.

Suponed que, relativamente a un referencial fijado, el Sol esté parado y que la Tierra efectúe, relativamente a este referencial, un movimiento de traslación circular uniforme. Suponed además que el eje de la Tierra sea perpendicular al plano de la eclíptica (que no haya nutación[2]) y que la Tierra tenga un movimiento de rotación, también uniforme. Bajo tales hipótesis, cada punto de la Tierra (siempre relativamente al antedicho referencial) describirá una de las curvas conocidas como epiciclos, o epicicloides, y esta puede ser una de las razones por que, en eras remotas, matemáticos y astrónomos, como Hiparco en el siglo II a. C., se interesaran por ellas.

Nota geométrica.

Considerad dos planos α y β «coincidentes». En el plano α «fijo» una circunferencia de centro O y radio R (base) y (haced vuestro dibujo) en el plano β «móvil», una circunferencia de centro C y radio r (rolante), tangente internamente (externamente) a la base en el punto T, así como un punto P, en la semirrecta CT, a distancia s de C, sobre la rolante.

Si la rolante «rueda sin resbalar» sobre la base, el punto P describe (en el plano α) una hipocicloide (epicicloide) normal, alargada o bien acortada según sea $s = r, s > r$ o bien $s < r$. Cuando P, C y O están alineados, P se llama vértice (polo) de la curva (según C quede entre O y P, o no). Si R/r es racional, la curva es cerrada; caso contrario, abierta.

Los sucesivos vértices (polos) son vértices (también sucesivos) de un polígono regular convexo, inscrito en la circunferencia principal, de centro O y radio $r+s$ ($|r-s|$) si R/r es entero, de un polígono regular estrellado, si R/r es racional, o de una línea poligonal regular abierta si R/r es irracional. La curva esta contenida en la corona limitada por tales circunferencias. Cada diámetro de esa corona que pase por un polo (vértice) es un eje de simetría de la curva.

Dado el punto de tangencia entre la base y la rolante, es muy fácil obtener el punto de la hipocicloide correspondiente, así como la tangente a ella en ese punto (vea 2 abajo).

[1] Rothman, T., Fukagawa, H. *Japanese Temple Geometry*. Scientific American, Mayo, 1998.

[2] Oscilación periódica del eje de la Tierra.

La hipocicloide con $\mathrm{R}/\mathrm{r} = 2$.

En ese caso, si $0 < b < a$, $R = a + b$, y $s = CP = (a - b)/2$, la curva tiene dos ejes de simetría perpendiculares, uno de ellos contiene los dos vértices (diámetro mayor $= 2a$), mientras que el otro contiene los dos polos (diámetro menor $= 2b$). Su punto medio común, O, es el centro (de simetría) de la curva. Cada cuerda que tenga punto medio en O se dice diámetro de la curva.

2. Un teorema de sangaku (¿1840?)

Hagamos la siguiente construcción: Sea T_0 un extremo del diámetro de la base, que contiene los vértices y T_φ un centro instantáneo de rotación genérico, tal que el arco T_0T_φ mida φ. Sea C_φ el punto medio de $OT\varphi$ y tomemos P_φ tal que $\angle T_\varphi C_\varphi P_\varphi = 2\varphi$. El punto P_φ pertenece a la curva y es extremo de un diámetro $P_\varphi P'$ de la misma. La recta t_φ, por él, perpendicular a $T_\varphi P_\varphi$, es tangente a la curva. Tracemos 3 paralelas a t_φ: u, por C_φ, d_φ, por O y t' por P'. La recta d_φ concurre con la base en dos puntos. Sean T_θ uno de ellos y θ el arco $T0T_\theta$.

Reemplazando ahora T_φ por T_θ, obtenemos el punto P_θ, perteneciente a la curva y un triángulo $T_\theta C_\theta P_\theta$. La circunferencia de centro T_θ y radio $T_\theta P_\theta$ es tangente a la curva, en P_θ.

El punto Q, simétrico de P_φ con respecto a u, determina un triángulo $T_\varphi C_\varphi Q$ congruente al triángulo $T_\theta C_\theta P_\theta$ (observad que u es bisectriz del ángulo $T_\varphi C_\varphi Q$).

Por el teorema de Tales, en el triángulo $T_\varphi C_\varphi R$ (R es la proyección ortogonal de T_φ sobre d_φ), concluimos:

La circunferencia de centro T_θ y radio $T_\theta P_\theta$ es tangente exteriormente a la curva y a sus dos tangentes paralelas a t_φ. Su centro dista $a + b$ de O.

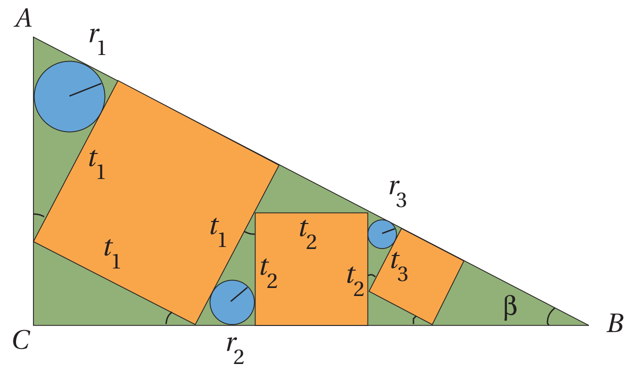
Se puede decir que los diámetros por $P_\varphi i$ y P_θ son asociados. La asociación es involutiva.

Finalmente, si consideramos las proyecciones S y U, de P, sobre OT, según la dirección de OT_0 y la dirección de $OT_{\pi/2}$ ortogonal a OT_0, vemos que la curva es una elipse de ejes $2a$ y $2b$.

Angelo Barone

Solución al sangaku

Sean t_1, t_2 y t_3 los lados de los cuadrados, donde $t_1 > t_2 > t_3$, y sean r_1, r_2 y r_3 los radios de los círculos, como se indica en la figura.



Sea $\beta = \angle ABC$. Se tiene entonces que

$$AC = t_1\left(\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{\cos\beta}\right)$$

.

Análogamente,

$$t_1 = t_2\left(\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{\cos\beta}\right)$$

y

$$t_2 = t_3\left(\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{\cos\beta}\right)$$

Entonces tenemos que $t_2^2 = t_1 t_3$ y por lo tanto que $r_2^2 = r_1 r_3$. Es decir, r_2 es la media geométrica de r_1 y r_3.

Óscar Chávez

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: oc918@mizzou.edu.