FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Boletín de FICOM

ACADEMIA MEXICANA DE CIENCIAS

Antes Boletín del Concurso de Primavera para Maestros

Boletín N.º 11 Diciembre, 2001.

El gran Fermat

Este año se celebran los 400 años del nacimiento de Pierre de Fermat (1601–1665). Fue contemporáneo de otros dos grandes matemáticos franceses, Descartes y Pascal. Fermat fue notable por el gran número de áreas matemáticas en las que se interesó, así como por sus significativas aportaciones. Creó su propia geometría analítica, independiente de la creada por Descartes y tal vez con un punto de vista más moderno. Participó también en la creación de los fundamentos de la probabilidad junto con Pascal. Como si eso no fuera suficiente, Fermat hizo grandes avances hacia el desarrollo del cálculo diferencial. Sin embargo, fue en el área de teoría de números donde Fermat dejó una marca indeleble. Un libro clásico en esa área es "Aritmética" de Diofanto. Ese libro fue redescubierto en el renacimiento y tuvo una gran influencia en los matemáticos de esa época. Fermat adquirió una copia y lo leyó con gran avidez y poco después estaba encontrando propiedades muy profundas de los números enteros.

Fermat tenía una gran intuición y en varias ocasiones hizo conjeturas o bien aseguró que un resultado era verdadero sin probarlo. Sin lugar a dudas la conjetura de Fermat que más intrigo a los matemáticos, es la conocida como el *último teorema de Fermat.*

Fermat escribió en el libro de Diofanto al lado de la Proposión II-8 su más famosa conjetura. Esa proposición expresa un resultado sobre la existencia de cuadrados de números enteros que se pueden escribir como suma de dos cuadrados, por ejemplo

$$5^2 = 4^2 + 3^2 \quad \text{o bien} \quad 25^2 = 7^2 + 24^2$$

La observación que escribió Fermat en el libro de Diofanto fue:

"*Pero es imposible expresar un cubo como suma de dos cubos, o una potencia cuarta en suma de dos potencias cuartas o en general cualquier potencia en suma de dos potencias iguales. De esto he encontrado una demostración excepcional. Este margen es muy pequeño para contenerla*".

Usando la notación moderna su conjetura dice que no se pueden encontrar números enteros a, b y c todos distintos de cero y un exponente $n \geq 3$ tal que $a^n + b^n = c^n$

No fue sino hasta 1995 que se encontró una prueba completa de esa conjetura. En efecto, después de casi 400 años, Andrew Wiles, en un trabajo de unas 250 páginas y con herramientas fuera del alcance de Fermat, probó lo que se conoce como el último teorema de Fermat.

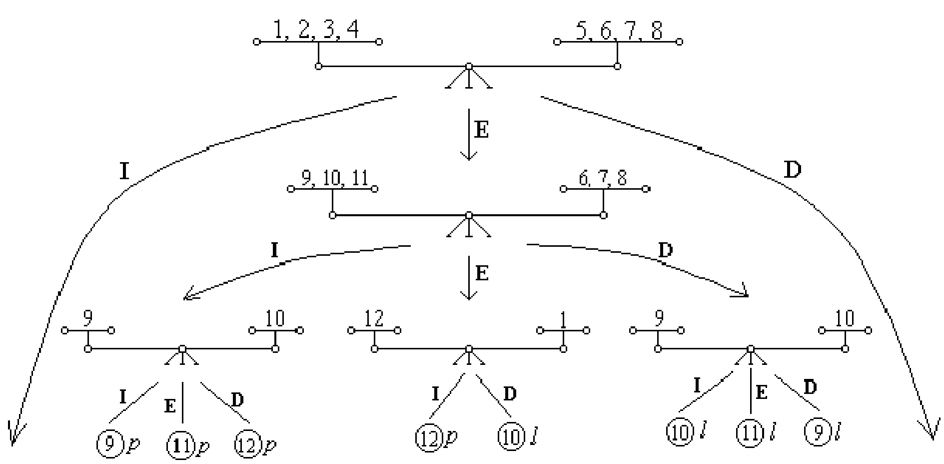
Fermat nació el 17 de agosto de 1601 en Beaumont de Lomagne y murió el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Hijo de un rico mercader de pieles, tuvo un hermano y dos hermanas, estudió en la Universidad de Toulouse antes de mudarse en 1620 a Bordeaux donde empezó su trabajo serio en matemáticas. De ahí fue a estudiar leyes a Orleans donde obtuvo su título, después compró un despacho en Toulouse donde vivió el resto de su vida. Fermat era considerado como uno de los líderes matemáticos de su época Sin embargo, sus intentos por publicar sus trabajos fueron infrutuosos ya que nunca quiso realmente pulirlos, pero siempre mantuvo una correspondencia muy rica con los grandes matemáticos de su época.

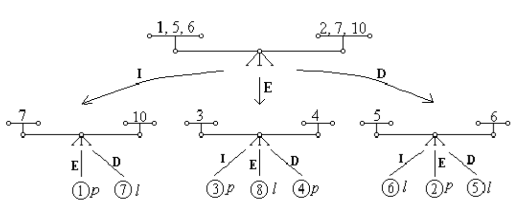
Carlos Bosch Giral

El problema de la pelota distinta

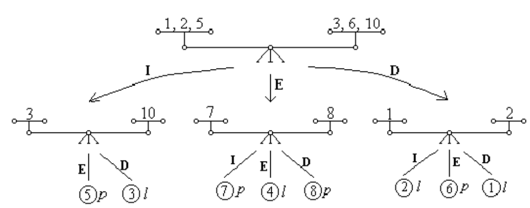
Un problema conocido es el de encontrar, dentro de un conjunto de pelotas aparentemente iguales, una que se distingue de las demás por su peso. Para decidir cuál de ellas es, se puede hacer un número limitado de pesadas utilizando una balanza. El problema que aparece con más frecuencia es con 12 pelotas y a través de tres pesadas se tiene que determinar cuál es la distinta. Este es un problema típico de árboles y se puede llegar a la solución a través de un árbol de decisión. Aquí voy a ilustrar esta solución y otras que resultan más sencillas que ésta en las que se establece una correspondencia uno a uno entre los tres resultados de las tres pesadas y las ternas que se pueden formar de un conjunto con tres símbolos en las que no aparecen los tres símbolos iguales. Veré que éste método se puede generalizar a otros casos.

Para facilitar la notación, numeraré las pelotas con los números del 1 al 12. Como hay 12 pelotas, se tienen 24 posibilidades que se pueden ver en la punta inferior de las ramas del árbol que presento a continuación y el resultado lo indico con una l o una p si la pelota es más ligera o más pesada que las demás. Sobre los platos de las balanzas están las pelotas que se pesan en cada momento y con las letras I, E, D indico si la balanza se inclina a la izquierda, queda en equilibrio o si se inclina a la derecha, respectivamente. El análisis de los casos I y D correspondientes a la primera pesada se analizan en la parte que indica la flecha respectiva.





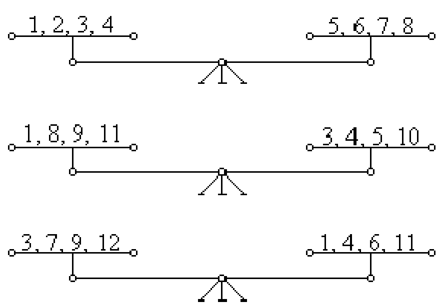
Balanza izquierda



Balanza derecha

En esta solución cada pesada depende del resultado de la pesada anterior. Claramente es una solución que requiere de un análisis exhaustivo de los casos y es difícil de recordar.

Ahora presentaré otra solución en la que en cada una de las tres pesadas se pesarán 4 pelotas específicas contra otras 4 y se anotará el resultado. En cada pesada, pueden suceder tres cosas: que la balanza se incline a la izquierda, lo cual representaré con el dígito 1, que la balanza se incline a la derecha, que representaré con -1 o que la balanza quede en equilibrio, que quedará representado con el número 0. De esta forma, la terna $(1, 0, -1)$ indicará que en la primera pesada la balanza se inclinó hacia la izquierda, en la segunda quedó en equilibrio y en la tercera se inclinó hacia la derecha. Como se permiten tres pesadas, el número de posibles ternas que se puede obtener es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Sin embargo, si se utilizan las 12 pelotas y se tiene cuidado de que ninguna pelota aparezca del mismo lado de la balanza las tres veces no se van a tener las ternas $(1, 1, 1)$ o $(0, 0, 0)$ o $(-1, -1, -1)$. Así, sólo hay 24 ternas posibles. Acomodando convenientemente las pelotas, estas ternas se pueden poner en correspondencia uno a uno con las 24 posibilidades que tienen las pelotas de que una de ellas sea más ligera o más pesada que las demás. Por ejemplo, si las pelotas se pesan como se muestra en la siguiente figura,



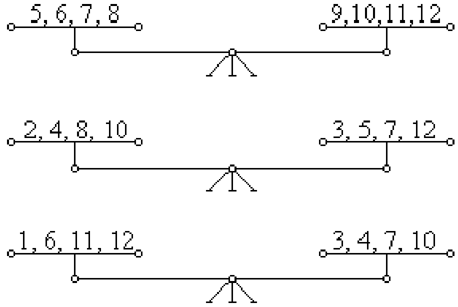
Tres pesadas

y la pelota 8 es más pesada que las demás, se tendrá la terna $(-1, 1, 0)$ y recíprocamente, si se tiene la terna $(-1, 1, 0)$, el "-1"significa que entre las pelotas $5, 6, 7$ u 8 está la más pesada o entre las pelotas $1, 2, 3, 4$ se encuentra la más ligera. El "1"significa que la más pesada puede estar entre las pelotas $1, 8, 9, 11$ o la más ligera entre la $3, 4, 5$ o 10, de donde se puede deducir que $1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11$ no son las pelotas buscadas. El "0"indica que tampoco las pelotas $3, 4, 12$ son de peso distinto, por lo que 8 es la pelota de distinto peso y es más pesada que las demás. Nótese que si el resultado hubiera sido el inverso de esta terna, es decir, $(1, -1, 0)$ la conclusión hubiera sido que 8 es la más ligera. De esta forma es posible establecer una correspondencia uno a uno entre los 24 posibles resultados de las 12 pelotas (ligeras o pesadas) y las ternas formadas por ceros, unos y menos unos en las que no se repite tres veces el mismo número.

En el ejemplo anterior mostré una forma de escoger las pelotas para pesarlas pero no es la única, podrían colocarse 12 ternas, cada una correspondiente a un resultado, de tal manera que no aparezcan una terna y su inversa en la lista, y que haya en cada componente 4 unos y 4 menos unos que serán los números que se pesen de cada lado de la balanza en cada pesada. De esta manera se forma un arreglo de 3×12 en el que cada renglón corresponde a una pesada y cada columna a una de las dos posibilidades de cada pelota. Los inversos de cada terna darán la otra posibilidad. Por ejemplo, el siguiente arreglo tiene las características mencionadas y pongo los números del 1 al 12 en el orden usual abajo de cada columna.

1a. componente	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
2a. componente	0	1	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	0	-1
3a. componente	1	0	-1	-1	0	1	-1	0	0	-1	1	1
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Si en cada pesada coloco las pelotas correspondientes a los unos del lado izquierdo y las correspondientes a los menos unos del lado derecho, obtengo una forma de colocar las pelotas, distinta a la del ejemplo anterior:

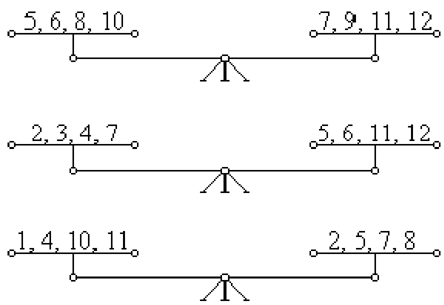


Nótese que la forma de poner los números del 1 al 12 en la parte inferior puede variar (hay $12! = 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ posibilidades).

Por otra parte, en base 3 cada terna formada con elementos del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ puede representar un número entre 0 y 13 o su inverso, esto es 27 números, por ejemplo, $-11 = (-1) \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3 + 1$ estaría representado por la terna $(-1, -1, 1)$ y sin las ternas $(-1, -1, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ podrían representarse los números del 1 al 12 y sus inversos. Así, se puede buscar una colocación de tal forma que el resultado nos informe directamente, considerado su representación en base 3, cuál es la pelota distinta y si es más ligera o más pesada.

Ahora, consideramos que $(-a)$ significa que la pelota a es más ligera para los números a iguales a

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ y $(+a)$ más pesada para los mismos números; y que $(-a)$ es más pesada para los números $7, 9, 11, 12$ y $(+a)$ es más ligera para éstos. Si la primera pesada corresponde al lugar de los $9's$, la segunda al lugar de los $3's$ y la tercera al lugar de los $1's$, se tiene la siguiente colocación para las pesadas que arroja el resultado deseado.



Por ejemplo, la terna $(-1, 0, -1)$ indica que 10 es la pelota más ligera pues $(-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + (-1) = -10$, mientras que la terna $(-1, -1, 1)$ indica que la pelota 11 es la más pesada ya que $(-1) \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3 + 1 = -11$.

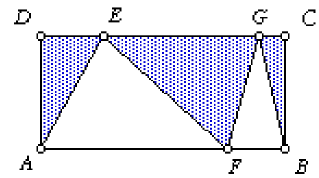
Este método se puede aplicar en otros casos siguiendo la misma idea, con 4 pesadas se tienen $3^4 - 3 = 78$ resultados posibles de los cuales la mitad de ellos es el inverso de la otra mitad. De aquí que se puede aplicar el mismo procedimiento para encontrar entre 39 pelotas, aparentemente iguales, aquella que se distingue por su peso efectuando sólo 4 pesadas. En forma análoga se puede resolver el problema efectuando m pesadas $(m \geq 2)$ y para decidir cuál pelota es la que se distingue de un conjunto de $\frac{3^m - 3}{2}$ pelotas aparentemente iguales.

Marcela González Peláez

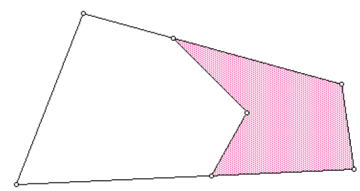
Problemas

En números anteriores de este boletín y del Boletín del Concurso de Primavera para Maestros hemos visto problemas con areas en los cuales utilizamos una propiedad muy importante de los triángulos: dos triángulos que tienen la misma base y la misma altura tienen la misma área, aunque su forma sea distinta. También podríamos decir que si un triángulo tiene al misma base y la misma altura que un paralelogramo dado, entonces el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, sin importar su forma. Usando este principio básico, podemos resolver estos problemas:

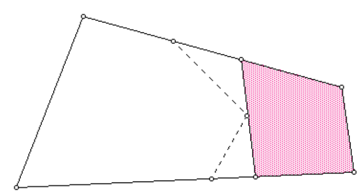
1. En la figura siguiente, un rectángulo ha sido dividido en dos regiones, una de las cuales aparece sombreada. ¿Qué región tiene mayor área?



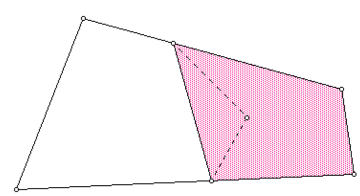
2. Benito y Guillermo tienen propiedades separadas por una cerca, como lo indica la figura:



A ninguno de los dos le gusta que la cerca no sea recta, así que acuerdan cambiarla por una cerca que sea recta. El problema es que ninguno de los dos está de acuerdo con la propuesta del otro:



La propuesta de Benito



La propuesta de Guillermo

¿Dónde deben construir la nueva cerca de tal manera que el área de cada propiedad permanezca constante y que la cerca sea recta?

Óscar Chávez

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: oc918@mizzou.edu.