F E D E R A C I Ó N
I B E R O A M E R I C A N A
D E C O M P E T I C I O N E S
M A T E M Á T I C A S

Boletín de FICOM

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

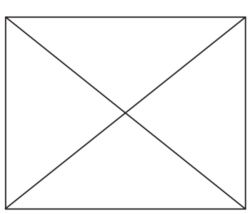
Boletín N.º 1 Marzo, 2000.

Bienvenidos

Este año nuestra publicación dará un gran paso pues se transformará en un boletín iberoamericano, Boletín de la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas es su nuevo nombre. Debido a esto tendremos más lectores, pues este boletín llegará a casi todos los países iberoamericanos. Esperamos también internacionalizarnos al recibir artículos de distintos colegas iberoamericanos. La labor que comenzamos en México podrá ahora, gracias a la Federación, ser de utilidad para toda nuestra comunidad. Queremos aprovechar esta ocasión para agradecer a la Academia Mexicana de Ciencias el apoyo que brindó al Boletín del Concurso de Primavera para Maestros y que estamos seguros nos seguirá brindando en esta aventura iberoamericana. Sin ese apoyo esto sería imposible. Este es el primer número del Boletín de FICOM, esperamos que lo disfruten.

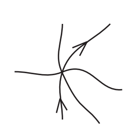
La firma del diablo

Intenta dibujar la siguiente figura sin levantar el lápiz y sin trazar ninguna línea dos veces.



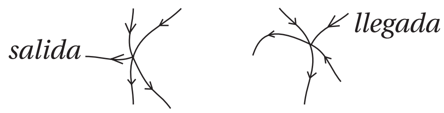
Después de intentarlo varias veces tal vez sospechemos que no se puede. Pero esto no es conclusivo porque a pesar de que intentemos varias veces sin éxito, tal vez en el siguiente intento sí lo logremos. Si queremos estar seguros de que algo no se puede hacer tenemos que tener argumentos mejores que simplemente haberlo intentado muchas veces sin éxito.

Analicemos más de cerca la situación. Consideremos un punto que no sea por el que empezamos. Para llegar a él nos hace falta un línea y para salir de él nos hace falta otra, como se muestra en la figura.

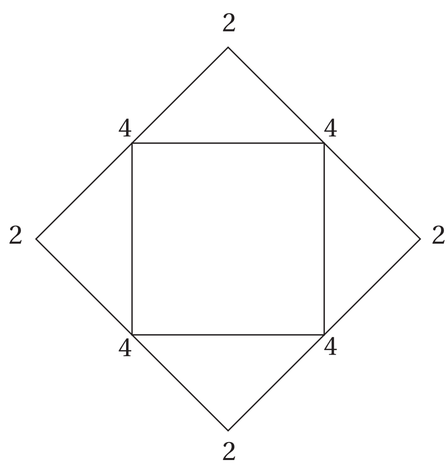


Así que en cualquier “punto de cruce” nos hará falta un número par de líneas.

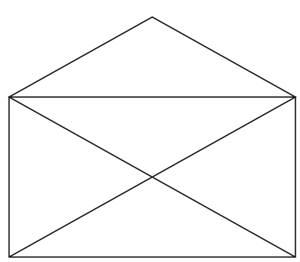
Ahora observemos que en el punto donde empezamos nos hace falta un línea para salir, tal vez posteriormente lo usemos como “punto de cruce”, así que en ese punto podemos tener un número impar de líneas. Algo análogo sucede en el punto de llegada.



Si queremos empezar y terminar en el mismo punto, entonces cada punto debe tener un número par de líneas. Por ejemplo, sólo es necesario contar el número de líneas en cada vértice de la siguiente figura para saber que se puede recorrer sin levantar el lápiz pasando una sola vez por cada línea, empezando y terminando en el mismo punto.

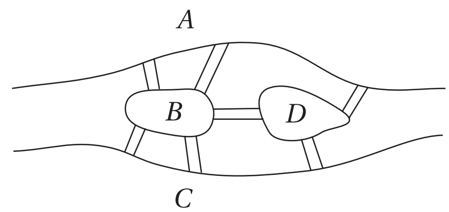


¿Se podrá dibujar la siguiente figura sin pasar por ninguna línea dos veces y sin levantar el lápiz?



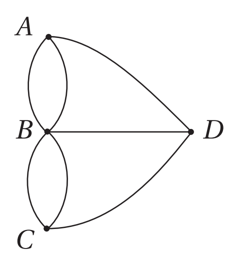
Esto que parecen simples juegos fue el principio de lo que hoy conocemos como la teoría de gráficas. Esta teoría ha seguido desarrollándose y cada año se descubren nuevos teoremas sobre gráficas, así como aplicaciones a otros campos, como la economía, la electricidad, etc.... El primer teorema en esta teoría se le atribuye a Leonhard Euler: “cualquier figura que dibujemos sin levantar el lápiz, sin pasar por ninguna línea dos veces empezando y terminando en el mismo punto tiene un número par de aristas a partir de cada vértice”.

Este teorema responde al siguiente problema: la ciudad de Königsberg se encuentra a orillas del río Pregel y sobre dos islas de éste. La disposición de la ciudad es la siguiente:



Los habitantes de esta ciudad gustaban de pasearse por los puentes y se plantearon la pregunta: ¿puede un habitante de la ciudad salir de su casa, pasear por la ciudad y volver a casa habiendo pasado por cada puente una sola vez?

Para resolver este problema hagamos un modelo representando las orillas por los puntos A y C y a las islas por los puntos B y D. Representemos a los puentes por líneas que van de las orillas a las islas y de una a otra isla, obteniendo la siguiente gráfica:



Hemos transformado el problema, que ahora consiste en recorrer esta gráfica sin levantar el lápiz pasando una sola vez por cada línea y empezando y terminando en el mismo punto.

Usando el teorema de Euler, usted puede responder esa pregunta y resolver el problema de *los puentes de Königsberg*.

La gráfica que aparece al inicio de este artículo no se puede recorrer sin levantar el lápiz: el número de líneas que llegan a cada vértice es impar, de acuerdo con el teorema de Euler, no es posible dibujarla. Esta gráfica es conocida como *la firma del diablo*.

Carlos Bosch

Las Olimpíadas en el salón de clase

Entre los objetivos del programa de matemáticas de 1.º de secundaria en México (7.º en otros países) están el desarrollar estrategias de conteo y relacionar las distintas áreas de la matemática. A continuación presentamos un problema que puede contribuir a alcanzar ambos propósitos.

¿Cuántos triángulos de lados enteros y cuyo perímetro sea 17 pueden construirse?

Al enfrentarse a este problema, los estudiantes suelen buscar tres números positivos cuya suma sea 17 y la búsqueda suele hacerla sin ningún orden. Podemos sugerirles que hagan una búsqueda sistemática, por ejemplo por tipo de triángulo, considerando tres casos: cuando los tres son iguales (equilátero), dos iguales (isósceles) y los tres iguales (escaleno). Triángulos equiláteros: no hay ninguno ya que 17 no es divisible entre 3. Triángulos isósceles: los lados iguales pueden ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, mayor de ocho ya no es posible puesto que el perímetro sería mayor de 17. Los correspondientes triángulos estarán representados por las tripletas de números: $(1,1,15)$, $(2,2,13)$, $(3,3,11)$, $(4,4,9)$, $(5,5,7)$, $(6,6,5)$, $(7,7,3)$, $(8,8,1)$. Son en total 8. Analicemos los triángulos escalenos y para ello construyamos una tabla en la que vayamos variando sistemáticamente los dos primeros lados, con lo que el tercer lado deberá ajustarse para que el perímetro sea 17 .

1	2	14	1	3	13	1	4	12
1	5	11	1	6	10	1	7	9
2	3	12	2	4	11	2	5	10
2	6	9	2	7	8			
3	4	10	3	5	9	3	6	8
4	5	8	4	6	7			

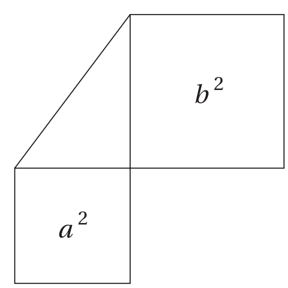
Le recomendamos al profesor que vaya construyendo, con la participación de los estudiantes, la tabla en el pizarrón. Es posible que observen algunos de los patrones que se van formando en la tabla. Por ejemplo, los que empiezan con 1 son 6, los que empiezan con 2 son 5, pero el patrón se rompe con el 3; es un buen ejemplo de lo cuidadosos que debemos ser al generalizar.

Para triángulos escalenos obtuvimos 16, por lo que la respuesta al problema planteado sería $16+8=24$. Decimos que sería porque evidentemente (para nosotros profesores, pero para los estudiantes no lo es) varias de las tripletas anteriores no corresponden con lados de un triángulo . Es probable que los estudiantes no se den cuenta así que podemos pedirles que hagan de tarea la construcción de los triángulos; que cada estudiante construya un triángulo distinto. La discusión al día siguiente, basada, primero en el descontrol y después en la reflexión que hayan hecho los estudiantes que les tocó construir "triángulos imposibles" [$(1,1,15)$ por ejemplo], y con la ayuda del profesor, dará pie para formular la desigualdad del triángulo: en un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos.

Iñaqui de Olaizola

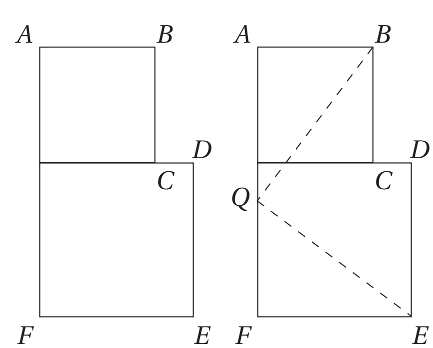
Pitágoras en rompecabezas

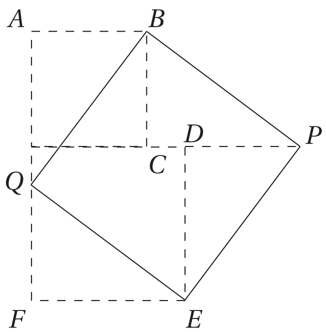
Si tenemos dos cuadrados, siempre se puede construir un tercero que tenga como área la suma de las áreas de aquéllos. En realidad, basta usar el teorema de Pitágoras para hacer esto. En efecto, coloquemos los dos cuadrados como se indica en la figura:



El lado del tercer cuadrado está dado por la longitud de la hipotenusa del triángulo que se ha formado. El teorema de Pitágoras nos dice que si se tiene un triángulo rectángulo con catetos a y b y con hipotenusa c, se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$. ¿Pero cómo cortar o recortar los cuadrados para formar ese nuevo cuadrado? En los 2500 años que han pasado desde el teorema de Pitágoras se han dado muchas soluciones distintas. Aquí ofrecemos una de ellas.

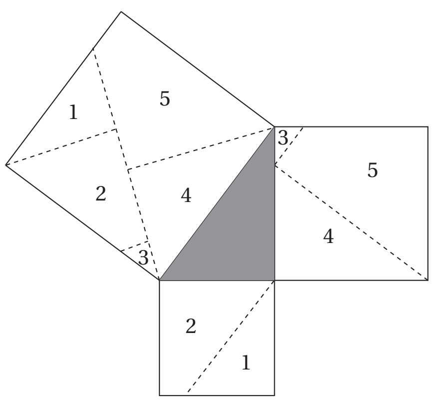
Formemos el polígono $ABCDEF$ como se indica en la figura. Sea $FQ = AB$ y tracemos EQ y BQ. Observemos que $EQ = BQ$ y además $\angle BQE$ es recto (¿Por qué?).



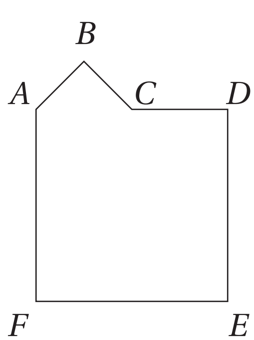


Completemos el cuadrado de lados BQ y QE para obtener el cuadrado $QBPE$. Observemos que $\triangle AQB \cong \triangle BCP$ y también que $\triangle EFQ \cong \triangle EPD$, así que el cuadrado $QBPE$ tiene como área la suma de las áreas de los dos cuadrados iniciales.

Si se recortan estos cuadrados con cortes como se indica en la figura, se podrá armar con esos pedazos un cuadrado cuya área sea la suma de las áreas de los cuadrados originales. Así se puede ilustrar el teorema de Pitágoras, usando el rompecabezas que acabamos de hacer.



Usando ideas similares a las expuestas en este artículo, trate usted de recortar en tres partes la siguiente figura de manera que al arreglarlas de otra forma formen un cuadrado.



Carlos Bosch

Pruebas, demostraciones y argumentos

Una *demostración* es la serie de aseveraciones que nos permiten saber que un teorema es verdadero. El arte de demostrar es la esencia misma de la actividad matemática. Sin embargo, como maestros, no es el aspecto formal de una demostración, con todo el rigor matemático que ello implica, lo que más nos importa. Lo que nos importa es lo que podríamos llamar un demostración aceptable. ¿Aceptable para quién? Para nosotros, para nuestros alumnos. Lo que en realidad debe preocuparnos, es el desarrollo de la capacidad de ofrecer argumentos fundados que justifiquen la solución a un problema. Los argumentos que esperamos de un niño de 11 años diferirán de aquéllos que esperaríamos oír de un joven de 16, incluso si la pregunta es la misma.

El valor educativo de una demostración reside en sus posibilidades de comunicar ideas matemáticas relevantes con respecto al tema en cuestión. Con lamentable frecuencia vemos estudiantes que no se consideran capaces de escribir una demostración, por la simple razón de que las únicas demostraciones que han visto en clase son extremadamente formales y rigurosas. Cuando un maestro se preocupa más por la técnica de demostración en sí que por el contenido de la proposición que se quiere demostrar, está privando a sus alumnos de la posibilidad del ejercicio de la argumentación. Es necesario que el maestro sepa distinguir entre una *demostración que demuestra* (es decir, que **sólo** demuestra) y una *demostración que explica*.

Un ejemplo típico de la diferencia entre unas y otras es la comparación de la demostración por inducción de que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ y la construcción de n parejas de números que suman $n+1$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
S(n) & = & 1 & + & 2 & + \cdots + & n \\
S(n) & = & n & + & n-1 & + \cdots + & 1 \\
\hline
2S(n) & = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1)
\end{array}$$

De donde se sigue que $S(n) = n(n+1)/2$. Sin embargo, la segunda, la *demostración que explica*, podrá sugerir a nuestros alumnos nuevas formas de enfocar problemas parecidos. No es accidental que la segunda demostración es obra de un niño de escuela elemental. Claro está que ese niño era Gauss, pero a alguien tienen que tratar de parecerse nuestros alumnos, ¿no es así?

Óscar Chávez

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: `http://www.missouri.edu/~oc918/ficom`.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: `inaquide@cueyatl.uam.mx`