FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Boletín de FICOM

ACADEMIA MEXICANA DE CIENCIAS

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Boletín N.º 2 Abril, 2000.

Las Olimpíadas en el salón de clase

El investigador francés Guy Brousseau ha encontrado que cuando a los estudiantes se les propone el siguiente problema:

> *En un barco hay 26 borregos y 10 chivos.*
> *¿Cuál es la edad del capitán?*

emiten respuestas, con mayor frecuencia de lo que uno podría imaginar, del tipo «36 años». ¿Cómo explicar el comportamiento de estos estudiantes?

Evidentemente el estudiante *sabe* que no hay ninguna relación causal, entre el número y el tipo de animales que transporta un barco, con la edad de su capitán. La explicación que nos da el citado investigador es que hay una serie de reglas, implícitas y explícitas (que él llama *contrato didáctico*) que rigen, en buena medida, el comportamiento de estudiantes y profesores en el aula.

El estudiante *sabe* que cuando se enfrenta a un problema verbal debe realizar operaciones con los datos que en él aparecen y no tiene que preocuparse por el significado de las relaciones involucradas. Generalmente la forma del enunciado le sugiere cuál es la operación que debe aplicar. También *sabe* que los problemas se resuelven con el procedimiento o algoritmo que recién explicó el profesor, de manera que cuando uno se enfrenta a un problema inmediatamente se da cuenta de si lo sabe o no resolver. Para resolver un problema no hay que hacer exploraciones más o menos largas, probar ideas y evaluarlas, sino que se debe simplemente seleccionar el algoritmo adecuado.

El estudiante ha aprendido, durante el largo tiempo que ha pasado en la escuela, que los problemas que le propone el profesor *siempre* tienen solución. Además siempre estan perfectamente definidos y tienen una única respuesta.

Sin embargo la realidad cotidiana del estudiante, y la realidad laboral que enfrentará en el futuro, no tiene esta forma tan claramente especificada. él deberá reconocer y definir con precisión problemas (que nadie le dará) y posteriormente explorará posibles soluciones, que frecuentemente no son únicas y a veces son inexistentes. Las habilidades necesarias para reconocer y plantear problemas, para explorar y evaluar posibles soluciones así como notar cuando existen y cuando no las soluciones, son fundamentales y debemos proveer al estudiante de actividades que promuevan su desarrollo.

La resolución de problemas como estrategia didáctica para desarrollar el conocimiento matemático implica tratar con problemas para los cuales no se conoce de antemano el método de solución, de problemas que a veces admiten más de una interpretación y parte de la tarea del estudiante es precisar las posibles interpretaciones con sus soluciones correspondientes y evaluarlas.

Un ejemplo de un problema que no tiene una solución única y que puede conducir a una discusión entre los estudiantes rica en contenidos matemáticos es el siguiente:

Eres el manager de un equipo de beisbol. Es la parte baja de la novena entrada, hay dos outs *y no hay ningún corredor en base. Tu equipo va perdiendo por una carrera. Decides mandar un bateador emergente para tratar de empatar el juego. Los posibles bateadores emergentes y sus estadísticas son las siguientes:*

	Mara	Rodrigo	Pedro
Home runs	9	15	6
Triples	2	5	3
Dobles	16	11	8
Sencillos	24	34	18
Bases por bolas	11	20	12
Outs	38	85	36

¿A quién escogerías? Explica tus razones.

Si queremos jugárnosla en una sóla carta meteremos al que mayor frecuencia relativa de home runs tiene. Pero esta no es la única estrategia. Podríamos buscar primero embasar a un jugador, eligiendo entonces al que mayor frecuencia relativa tiene para lograrlo y luego buscar quien con mayor efectividad conecte batazos de extrabase, etc. Son distintas soluciones cuya evaluación requiere de argumentos de contenido matemático (razones, probabilidad, etc.).

Si, por otra parte, continuamos como maestros con la práctica de proponer problemas rutinarios y carentes de sentido para los alumnos, corremos el riesgo de toparnos con una experiencia que, dicen las malas lenguas, le ocurrió a un profesor. Este amigo les planteó el siguiente problema a sus alumnos:

Hoy 18 de marzo del año 2000, el precio del barril de petróleo es de 20 dólares. Hace 3 años el precio era la mitad del triple del precio de hace 10 años. ¿Cuál es mi edad?

Inmediatamente un alumno levanto la mano y respondió, «Usted debe tener 46 años».

Efectivamente esa era la edad del profesor. éste, intrigado, le pidió al alumno que explicará cómo había encontrado la respuesta y el alumno explicó, «bueno, es que conozco un amigo que es medio sangrón y tiene 23 años, así que ud. debe tener 46».

Iñaqui de Olaizola

Una gran sorpresa ...

Un rey muy rico fue rescatado por un campesino al momento en que se iba a ahogar. Para recompensarlo por su acto heroico, propuso darle una buena cantidad de dinero a lo largo de treinta días. Sin embargo, le dio a elegir entre dos posibilidades.

El plan número 1 consistía en darle 1 libra, que era la moneda del reino, el primer día, 2 libras el segundo día, 3 libras el tercero, y así, consecutivamente, aumentando una libra por día.

El plan número 2 consistía en darle 1 centavo de libra el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos en tercer día, y así, consecutivamente, aumentando el pago al doble cada día. En este plan el tercer pago es de $2 \times 2 = 2^2$, el cuarto es de $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, el quinto es de $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, así que el último pago será de $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{29}$ centavos de libra.

La pregunta inmediata es saber cuál es la mejor opción para el campesino. Es calro que tiene que elegir la opción que le deje más dinero. Calculemos cuánto dinero le deja el primer plan: $1 + 2 + 3 + \cdots + 30$ y dispongamos los números de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + & 2 & + \cdots + & 15 \\ 30 & + & 29 & + \cdots + & 16 \end{array}$$

Al hacer la suma de esta forma vemos que tenemos 15 sumas cuyo valor es 31, es decir, en total se tienen $15 \times 31 = 465$ libras.

Ahora calculemos la cantidad de dinero para el plan 2. Para esto hay que calcular $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{29}$.

Una manera rápida de hacerlo es observando que $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{30}$ es el doble de la cantidad anterior. Si a esta última le restamos la anterior, obtenemos, por un lado, $2^{30} - 1$, y por otro tenemos la cantidad de dinero del plan 2, pues si al doble de una cantidad se le resta esa cantidad, obtenemos esa cantidad.

Es fácil calcular 2^{30}, pues sabemos que $2^5 = 32$, $2^{10} = 32 \times 32 = 1024$, $2^{30} = 1024 \times 1024 \times 1024 = 1\,073\,741\,824$, entonces $2^{30} - 1 = 1\,073\,741\,823$ centavos de libra. Con el plan 2, el campesino ganará más de un millón de libras.

Esta historia nos permite constatar que cuando se va duplicando en cada paso una cantidad, ésta crece mucho más rápido que cuando se le suma una cantidad fija en cada paso. El crecimiento que se describe en el plan 2 es llamado en matemáticas *crecimiento exponencial* en base 2, pues se duplica en cada paso.

Toma en cuenta esta particularidad para resolver el siguiente problema. Pensemos que una amiba se coloca en un frasco vacío (con una solución donde la amiba encuentre nutrientes, claro está). Al cabo de un segundo, ésta se divide en dos amibas y cada una de estas «hijas» es de igual tamaño que la «mamá». Al cabo de un segundo, las «hijas» se dividen de manera semejante. cada vez que una generación se divide, el número de amibas y su volumen se duplica. Sabemos que el frasco está lleno en una hora. ¿En qué momento estuvo a la mitad?

Carlos Bosch

Las Olimpíadas en el salón de clase

Consideremos el siguiente problema: *En la orilla de un río se encuentran 8 adultos, 2 niños y un pequeño bote de remo. Queremos que todas las personas crucen, usando el bote, al otro lado del río. El bote puede llevar: 2 niños, o un solo niño o un solo adulto. Todos saben remar. «Un viaje» significa cruzar el río en cualquier dirección. ¿Cuál es el menor número de viajes que deben hacerse para lograr que todos crucen al otro lado del río?*

Creemos que la exploración de este problema propicia una rica variedad de contenidos y habilidades matemáticas y les proponemos que desarrollen la siguiente actividad con los estudiantes: formar a equipos de 3 o 4 estudiantes y pedirles que llenen el cuestionario que aparece en la siguiente página y discutir con todo el salón sus respuestas. Presentamos el cuestionario aparte para que pueda ser fácilmente reproducido y utilizado.

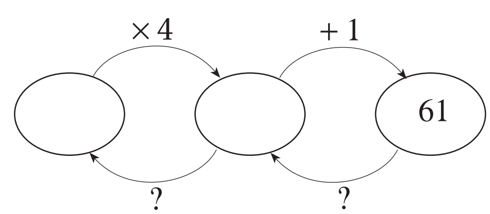
Para resolver el problema, evidentemente lo primero que hay que hacer es que los dos niños crucen el río y se regrese con el bote uno de ellos, con lo cual ya llevamos 2 viajes. En seguida, un adulto cruza y el niño que se quedó en la otra orilla regresa con el bote, es decir 2 viajes más. Hasta el momento llevamos 4 viajes y hemos logrado pasar un adulto y los niños siguen en su posición original. Necesitamos 4 viajes por cada adulto y un último viaje con los dos niños, es decir $4 \times 8 + 1 = 33$ viajes. Es probable que algunos de los equipos expresen la fórmula verbalmente, lo cual es correcto, pero se les puede ayudar también para que lo hagan algebraicamente: el número de viajes necesarios cuando hay n adultos es $4 \cdot n + 1$.

Es muy importante tener la disposición de escuchar a los estudiantes. Al desarrollar esta actividad con un grupo de 1.º de secundaria uno de los equipos generó la fórmula siguiente:

de viajes $= (n - 10) \times 4 + 41$. La inercia de nuestro trabajo nos lleva frecuentemente a desechar una respuesta tan «extraña», tan «evidentemente» arbitraria y errónea, para después explicarle a los estudiantes la fórmula correcta, es decir, la que nosotros encontramos. Al examinar la fórmula generada por los estudiantes encontramos que su expresión es equivalente a la nuestra: $(n - 10) \times\ 4 + 41 = 4 \times n - 40 + 41 = 4 \times n + 1$. Al preguntarles cómo habían llegado a esa fórmula respondieron más o menos de la siguiente manera: «Primero restamos diez personas y multiplicamos por 4 por que por cada adulto son 4 viajes y despues agregamos los 41 viajes de las 10 personas que quitamos».

Poner a discusión general las soluciones de los distintos equipos permite incorporar conceptos como la equivalencia de las expresiones, la eficiencia de los métodos empleados, etc. La segunda parte del cuestionario invierte el problema: dado el número de viajes ¿cuántos adultos había? Lleva al estudiante a hacer el procedimiento en sentido inverso y es una oportunidad para introducir notaciones como las siguientes: ¿Cuántos adultos hay si se necesitaron 61 viajes?

La ecuación: $4 \times n + 1 = 61$, gráficamente:



Las dos últimas preguntas de esta serie no tienen respuesta y plantean, en un contexto más o menos sencillo, la necesidad de argumentar la imposibilidad de la solución e incluso, ya sea que surja en la discusión con los estudiantes o que la empujemos nosotros hacia allá, nos permitirá caracterizar todas las soluciones posibles al problema con frases como: «el número de viajes es necesariamente un número que al dividirse por 4 deja residuo 1» y que al mismo tiempo sirven como criterio para decidir si un problema de este tipo tiene solución o no.

Iñaqui de Olaizola

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.

Grado ____________ Grupo ____________ Fecha ______________________________

Nombres de los integrantes del equipo:

En la orilla de un río se encuentran 8 adultos, 2 niños y un pequeño bote de remos. Queremos que todas las personas crucen, usando el bote, al otro lado del río. El bote puede llevar: 2 niños, o un solo niño o un solo adulto. Todos saben remar. Un «viaje» significa cruzar el río en cualquier dirección.

¿Cuál es el menor número de viajes que deben hacerse para lograr que todos crucen al otro lado del río?

Explica cómo encontraste la respuesta:

¿Cuál sería la respuesta si hubiera 12 adultos y 2 niños? ______________________________

¿Y si fueran 100 adultos y 2 niños? ______________________________

¿1000 adultos y 2 niños? ______________________________

¿Cuál es la regla o fórmula cuando hay cualquier número de adultos y 2 niños?

Explica por qué funciona la fórmula:

¿Cuántos adultos hay si se necesitaron 17 viajes? ______________________________

¿Cuántos adultos hay si se necesitaron 61 viajes? ______________________________

¿Cuántos adultos hay si se necesitaron 28 viajes? ______________________________

¿Cuántos adultos hay si se necesitaron 27 viajes? ______________________________

¿Hay alguna regla para decidir si existe la respuesta en preguntas como las anteriores?