F E D E R A C I Ó N
I B E R O A M E R I C A N A
D E C O M P E T I C I O N E S
M A T E M Á T I C A S

Boletín de FICOM

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

Boletín N.º 3 Mayo, 2000.

Los infinitésimos de Ridaura

Existe un gran consenso entre quienes se dedican a la investigación en el campo de la Educación Matemática acerca de la importancia que tiene propiciar situaciones en el aula que promuevan que los estudiantes se involucren en actividades propias del matemático: no se pretende, por supuesto, que se comporten como matemáticos profesionales, sino que dentro de su contexto asuman actitudes de los matemáticos, por ejemplo, que propongan nuevos conceptos tendientes a resolver problemas y darle sentido a situaciones específicas y que exploren las consecuencias que de ellos se desprenden.

Comentaremos una situación que se presentó con estudiantes de 1.º de secundaria y que, me parece, ilustra este punto. Estábamos discutiendo el *significado* de la multiplicación de fracciones. ¿Qué significa, por ejemplo, $\frac{1}{3} \times 9$? Puesto que ya habíamos discutido el significado de la multiplicación de enteros, convertimos este problema en uno de multiplicación por un entero, es decir: $\frac{1}{3} \times 9 = 9 \times \frac{1}{3}$, es decir, nueve veces $\frac{1}{3}$ o, equivalentemente, 3 enteros. Una estudiante hizo la multiplicación $9 \times \frac{1}{3}$ convirtiendo la fracción a decimales, lo que, después de corregir un error que había cometido, le condujo a la expresión $9 \times \frac{1}{3} = 2.999\ldots$. Esto nos llevó a plantear la pregunta ¿$2.999\ldots = 3$?

Se trata de una pregunta muy complicada debido a que involucra el concepto de infinito. La expresión $2.999\ldots$ contiene una infinidad de nueves: ¿qué significa esto?

La noción de infinito ha perturbado a muchas de las mentes más brillantes de los matemáticos de todas las épocas. Por ejemplo, los griegos de la antigüedad aceptaban la noción de *infinito potencial*; en los *Elementos* de Euclides se habla de rectas que se pueden prolongar indefinidamente, esto es, potencialmente infinitas, pero se oponían explícitamente a la noción de *infinito actual*, esto es, la existencia de cantidades infinitas. Por ejemplo, en el mismo libro de Euclides se establece el axioma: *el todo es mayor que sus partes*, que es una clara alusión a la imposibilidad del infinito actual (por ilustrar esta idea recordemos que los naturales [el todo] es igual [puede ponerse en correspondencia uno a uno] con los pares [una de sus partes]). La existencia de un infinito actual es ajena a nuestra experiencia y por ello resulta muy difícil de aceptar.

Regresemos a la pregunta planteada: ¿$2.999\ldots = 3$? La respuesta adelantada por los estudiantes fue *no* y la razón esgrimida: *no son iguales porque el* $2.999\ldots$ *nunca llega a ser 3*. Puesto que me dicen que no son iguales —dije yo— ¿en qué son diferentes? A lo que siguió una intensa discusión, en la que argumenté: si ustedes afirman que al $2.999\ldots$ le falta un *pedacito* para ser 3, por pequeño que sea ese pedacito, si yo considero cada vez más nueves en la parte decimal lograré estar más cerca de lo que ustedes dicen, es decir, *me puedo acercar al 3 tanto como quiera*. Solamente una estudiante aceptó esta afirmación como razón para entender la igualdad entre las dos expresiones y el argumento en contra de esta visión siguió siendo, por casi la totalidad de los estudiantes: *si me puedo acercar tanto como quiera pero nunca llego al 3, siempre falta algo*. Ante mi insistencia en qué me dijeran entonces por cuánto eran diferentes, un par de estudiantes (de apedillos Ridaura y Arnaut) dijeron: le falta un infinitésimo.

Una vez que me repuse de la enorme sorpresa que me produjo escuchar esta expresión, les pregunté: ¿qué es eso de un infinitésimo? ¿de dónde sacaron esa palabra? Un infinitésimo —respondió Ridaura— es un punto seguido de una infinidad de ceros y al final un uno. La palabra —explicó Arnaut— viene de infinito. Puesto que Arnaut tiene hermanas en los años últimos de bachillerato, es posible que les haya escuchado la palabra, pero no deja de tener mérito emplearla en un contexto adecuado. Por otra parte uno como profesor tiende a caer en la tentación de *imputarle* a respuestas como esta un significado matemático que tal vez no tengan: ¡uno podría pensar que se trata de una intuición genial acerca del análisis no estándar!

Me parece que lo relevante no es si estamos frente a tal genialidad o no, lo importante es que en situaciones como la propuesta, en la que se plantean problemas como el mencionado, surgen discusiones en las que los estudiantes se comportan como matemáticos, en el sentido de que proponen y examinan razones y argumentos y, en este caso, se adelanta una explicación nueva para todos y cuya bondad debe ser explorada por todo el salón y no sancionada como correcta o no por el profesor.

Creo, sin embargo, que sí es tarea del profesor reproducir a escala del aula, la comunidad matemática y nombrar el nuevo concepto creado, por ejemplo *los infinitésimos de Ridaura*, y propiciar las discusión acerca de estos nuevos «bichos», por ejemplo, invitar a los estudiantes a explorar preguntas como ¿son números como las fracciones decimales? ¿cómo podemos sumarlos, restarlos, etc.? ¿qué significa operar números de los «otros» con los infinitésimos de Ridaura?

Iñaqui de Olaizola

Un resultado numérico notable y su explicación en términos geométricos

Toma el producto de cuatro números naturales consecutivos y súmale 1; el resultado es un cuadrado perfecto. Ejemplos

$$1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$$
$$2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$$
$$3\times 4\times 5\times 6+1=361=19^2$$
$$4\times 5\times 6\times 7+1=841=29^2$$

Vamos a ver cómo podemos dar un argumento convincente de que esto es siempre cierto, con la ayuda de representaciones geométricas. Lo haremos en tres partes.

Primera parte. Productos de tres números consecutivos.

Podemos notar que cuando tenemos tres números consecutivos (por ejemplo 3, 4, 5), el producto del primero por el tercero ($3\times 5=15$) difiere en uno del cuadrado del número de enmedio ($4^2=16$). Podemos representar esto por medio de un rectángulo y un cuadrado que se traslapen como en la figura 1. La tira que le sobra al cuadrado es una unidad más grande que la tira que le sobra al rectángulo.

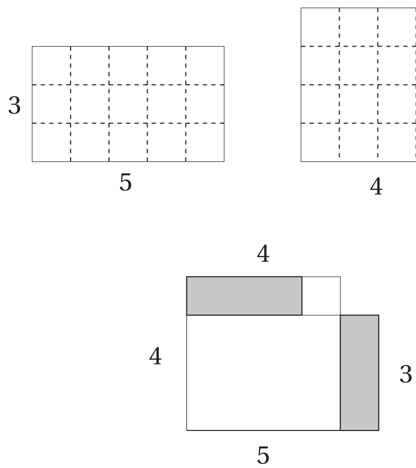

Figura 1. $3 \times 5 + 1 = 4^2$

En el caso general los lados del cuadrado miden $m+1$ y los lados del rectángulo miden m y $m+2$. Otra vez, la tira que le sobra al cuadrado es una unidad mayor que la tira que le sobra al rectángulo. Podemos describir la relación algebraicamente como $m(m+2)+1=(m+1)^2$.

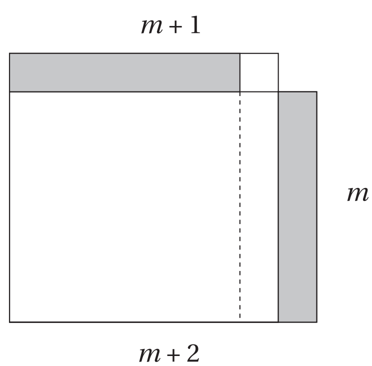

Figura 2. $m(m+2)+1=(m+1)^2$

Segunda parte. Productos de cuatro números consecutivos.

De manera semejante al ejemplo anterior, si tenemos cuatro números cosecutivos, por ejemplo 3, 4, 5, 6, y tomamos el producto del primero y el cuarto número por un lado (3×6), y por otro el producto del segundo con el tercero (4×5) vemos que difieren en dos unidades. Podemos otra vez representar la situación por medio de rectángulos que se traslapan (ver figura 3). La tira que le sobra a un rectángulo es dos unidades mayor que la tira que le sobra al otro rectángulo. Podemos representar algebraicamente la situación en general como $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$. La figura 4 muestra que el resultado es cierto en general, ya que la tira que le sobra a un rectángulo es dos unidades mayor que la tira que le sobra al otro rectángulo.

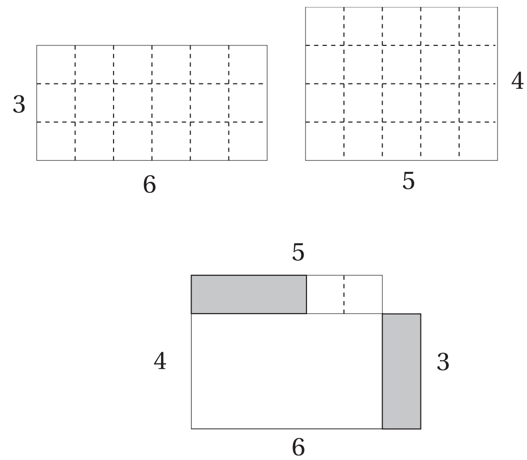

Figura 3. $3 \times 6 + 2 = 4 \times 5$

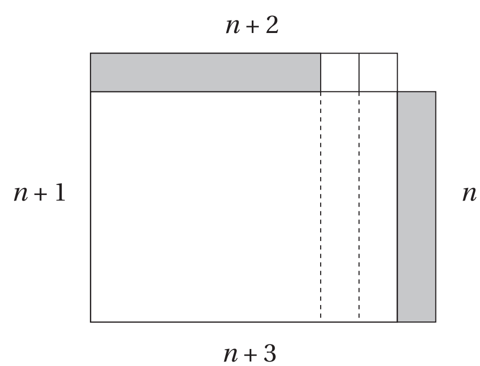

Figura 4. $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$

Tercera parte. El producto de cuatro números consecutivos.

Finalmente, consideremos el producto de cuatro números consecutivos, por ejemplo, $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, ó en general $n(n+1)(n+2)(n+3)$. Como vimos en la segunda parte, el producto del primero por el cuarto difiere en dos unidades del producto del segundo por el tercero, esto es, si $n(n+3)=m$, entonces $(n+1)(n+2)=m+2$. De la primera parte sabemos que $m(m+2)+1=(m+1)^2$. Utilizando los productos $n(n+3)$ y $(n+1)(n+2)$, reacomodando los términos tenemos $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$. Vemos así que el producto de cuatro números consecutivos más uno es un cuadrado perfecto, un resultado sorprendente.

Ejercicios.

1. Muestra que el resultado de la sección 1 es equivalente a la identidad $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.
2. Verifica algebraicamente (desarrollando ambos lados de la ecuación) que $n(n+3)+2 = (n+1)(n+2)$.
3. Utiliza una calculadora con capacidad de hacer operaciones algebraicas para factorizar la expresión $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$.

Alfinio Flores Peñafiel

El servicio aéreo y sus problemas

Hay técnicas matemáticas que tienen un impacto directo en las ganancias de las empresas y el buen funcionamiento de muchos aspectos de nuestra vida. Una de esas áreas de las matemáticas es la programación lineal, en donde se trata de encontrar soluciones optimas a distintos problemas que son lineales. Encontrar una solución optima significa encontrar la mejor solución. Lo más común es buscar el mínimo de una función de costos. Por ejemplo en el caso de una línea área es importantísimo minimizar los costos relacionados con el planeamiento de los sobrecargos, su alojamiento hotelero y otros costos que no están asociados con el tiempo de vuelo. Claro que para minimizar esto tenemos ciertas restricciones como son el hecho de que los pilotos solo pueden volar un cierto numero de horas, que tienen que descansar cierto tiempo, etc.

Una solución óptima es, a veces, una solución que minimiza el costo o bien que maximiza las ganancias. Ya hemos visto un ejemplo donde es necesario encontrar un mínimo, veamos ahora un ejemplo donde es necesario encontrar un máximo. También en una línea aérea, para maximizar la ganancia asociada con la asignación de aviones de manera que los aviones grandes se asignen a los segmentos con más pasajeros y los aviones pequeños a los segmentos con menos demanda. Por supuesto que encontrar una solución máxima o mínima depende de la función que queremos optimizar.

En este tipo de problemas se trabaja con matrices, que no son más que arreglos de números con los que se opera y que después de algunos cálculos dan una solución óptima. Un método muy conocido en el área de problemas que se pueden modelar de manera lineal es el método *simplex* el cual se puede implementar en la computadora y ha sido de gran utilidad para negocios tanto grandes como pequeños. Este método fue desarrollado por George Dantzig hace unos 50 años.

Es importante, además de encontrar una solución óptima, encontrarla rápido como puede verse en la siguiente situación. En casi todos los paises hay aeropuertos que son nudos en la transportación aérea y si de casualidad hay mal tiempo en la ciudad donde se encuentra uno de estos aeropuertos muchos vuelos se retrasan, otros se cancelan y el aeropuerto se vuelve un verdadero caos. Es importantísimo restablecer los vuelos y hay que hacerlo inmediatamente después de que pase el mal tiempo. Se plantea así un nuevo problema, que debe ser resuelto lo antes posible. Si logramos encontrar una solución óptima, con algoritmos y programas de cómputo 50 o 100 veces más rápidos, cuando se pongan en operación nuevamente todos los aviones y las tripulaciones, los costos de ese caos habrán sido mínimos y el inconveniente causado a los pasajeros habrá sido el menor posible.

Actualmente hay algunos algoritmos muy rápidos para resolver problemas modelados con funciones lineales, como por ejemplo el algoritmo inventado por Narendra Karmarkar hace algunos años. Las compañías áreas están invirtiendo mucho dinero en encontrar un algoritmo del tipo del de Karmarkar y tan rápido como ese. En caso de encontrar ese algoritmo eso permitiría no nada mas resolver el problema que hemos planteado sino también resolver problemas en los que ni siquiera se había pensado usar el método simplex. La programación lineal es un área de las matemáticas donde la investigación tiene un impacto más fuerte en muchos aspectos de nuestra vida.

Carlos Bosch Giral

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.