Boletín de FICOM

FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

Boletín N.º 4 Junio, 2000.

El problema del cumpleaños, otra vez

En el Número 4 del Boletín del Concurso de Primavera para Maestros, publicado en febrero de 1998, apareció un artículo de Renata Villalba y Raúl Rueda sobre el problema del cumpleaños. Este problema se puede enunciar en la siguiente forma:

> *¿Cuántas personas deben estar presentes en una reunión para garantizar que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea de 1/2?*

Sorprendentemente, bastan 23 personas en una reunión para que esta probabilidad sea mayor que 1/2. Este resultado suele contradecir nuestra intuición. Como Rueda y Villalba apuntan, lo que casi todo mundo esperaría es que se necesite un número mucho mayor de personas.

Una de las razones por las que resulta tan difícil conciliar este resultado con nuestras expectativas es que solemos pensar que es raro encontrar otra persona que cumpla años el mismo día **que nosotros**. En efecto, debe haber más de 23 personas en una reunión para que la probabilidad de que una de ellas cumpla años en cierta fecha determinada de antemano sea mayor que 1/2. A manera de ejemplo, digamos que tal fecha es el cumpleaños del anfitrión.

Preguntémonos entonces, cuántas personas se necesitan en una reunión para que la probabilidad de que una de ellas cumpla años el mismo día que nosotros sea mayor que 1/2. Olvidándonos de los años bisiestos, para simplificar el problema, si un año tiene 365 días, parece razonable creer que 183 bastarán para que la probabilidad de que una de ellas cumpla años el mismo día que nosotros sea igual a 1/2, ¿no es así?

Otra vez, la intuición nos traiciona. Recordemos que los cálculos hechos en el artículo anterior se basaban en la idea de calcular, invitado por invitado, la probabilidad de que su fecha de cumpleaños **no** fuera la misma que la de un invitado anterior. Sigamos una estrategia análoga.

Supongamos que el cumpleaños del anfitrión es el 22 de junio. ¿Cuál es la probabilidad de que un invitado **no** cumpla años en esa fecha? 364/365. ¿Y la probabilidad de que un segundo invitado **tampoco** cumpla años en esa fecha? No es 363/365, sino otra vez 364/365. Hay que destacar el hecho de que no nos importa, en este caso, si el primer invitado y el segundo cumplen años el mismo día, siempre que sea en una fecha distinta del 22 de junio. De hecho sabemos que es muy probable (más de 1/2) que dos invitados cumplan años el mismo día si hay más de 23 invitados, pero esta vez queremos que al menos uno de los invitados cumpla años el mismo día **que el anfitrión**.

Entonces, la probabilidad de que ninguno de los n primeros invitados cumpla años el 22 de junio es

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Dicho de otra manera, la probabilidad de que alguno de los primeros n invitados cumpla años el mismo día que el anfitrión es

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^n$$

La siguiente tabla nos muestra los cálculos correspondientes a distintos números de invitados. $P(E)$ es la probabilidad de que al menos un invitado cumpla años el 22 de junio, $P(\neg E)$ es la probabilidad de que tal cosa no ocurra y n es el número de invitados:

n	$P(\neg E)$	$P(E)$
1	0.9973	0.0027
2	0.9945	0.0055
183	0.6053	0.3947
200	0.5777	0.4223
253	0.4995	0.5005
500	0.2537	0.7463

Puede verse que se necesitan 253 invitados para que la probabilidad de que uno de ellos cumpla años el mismo día que el anfitrión sea mayor que 1/2, es decir,

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^n > 1/2 \quad \text{si} \quad n > 252$$

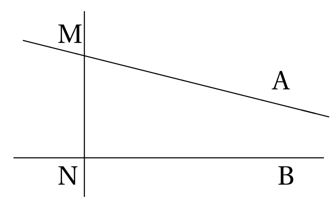
El matemático inglés Ian Stewart ha señalado que nuestra intuición para la probabilidad es notablemente más pobre que nuestra intuición para la aritmética o la geometría. Una razón más para darle su lugar en el salón de clase.

Óscar Chávez

Geometrías no Euclidianas 1

"Los elementos", escrito hace unos 2300 años por el matematico griego Euclides, ha sido, después de la Biblia, el libro que ha sido traducido a más idiomas y sin lugar a dudas uno de los que ha tenido mayor influencia en nuestra cultura. La geometría que se estudia en las escuelas es la geometría de este libro. En "Los elementos" aparecen primero unas nociones básicas (punto, línea, ...) y luego en forma de listado aparecen bajo la denominación de postulados diez propiedades que deben considerarse como "verdades evidentes". Sin embargo, el mismo Euclides pensó que algunos de esos postulados eran verdades "más evidentes" que otros, ya que tuvo ciertas reservas para utilizar el postulado número cinco y no lo usó en la demostración de sus primeras 28 proposiciones. El quinto postulado se enuncia como sigue:

> *Si dos puntos en el plano, A y B, están del mismo lado respecto a una línea recta MN y la suma de los ángulos AMN y BNM es menor que 180°, entonces las semirrectas MA y NB se intersecan al ser prolongadas suficientemente.*



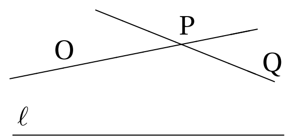
Entre la época de Euclides y el siglo XIX varios matemáticos creyeron haber demostrado el quinto postulado de Euclides, sin embargo lo único que hicieron fue encontrar proposiciones equivalentes a ese postulado. De éstas, tal vez la más famosa sea el postulado de las paralelas, de John Playfair (inglés, 1748-1819):

> *Dada una línea recta ℓ en el plano y un punto P fuera de ésta, existe una única recta paralela que pasa por P y no interseca a ℓ (es decir, que es paralela a ℓ).*

Esta es la versión del quinto postulado que se enseña usualmente en las escuelas.

Para tratar de probar ese postulado los matemáticos tanto profesionales como amateurs usaron métodos indirectos, es decir negaron el quinto postulado pensando que eso les llevaría a una contradicción. En ese sentido el más persistente de esos pioneros fue un padre jesuita, Jerónimo Saccheri (italiano, 1667-1773), que a pesar de sus grandes esfuerzos no obtuvo prueba alguna del quinto postulado de Euclides. Fue Carl Frederick Gauss (alemán, 1777-1855), considerado uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, quien tomando un punto de vista muy moderno sustituyó el quinto postulado de Euclides por el siguiente:

Dada una línea recta ℓ en el plano y un punto P fuera de ésta, existe un ángulo OPQ tal que las únicas rectas que pasan por P e intersecan a ℓ están en el interior de tal ángulo.



La geometría que se construye usando este postulado en vez del quinto postulado de Euclides es llamada *geometría hiperbólica*. Otra geometría no euclidiana se llama *geometría elíptica*. Las rectas límite PO y PQ son rectas paralelas a ℓ, en este caso hay una infinidad de rectas que al igual que las rectas paralelas pasan por P y no intersectan a la recta ℓ. Una propiedad esencial de la geometría hiperbólica es que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo ABC es menor que 180 grados, es decir que $A + B + C < 180°$, además el área del triángulo ABC está dada por la siguiente fórmula:

$$\left(\frac{A+B+C}{180°}\right) \cdot \pi$$

Gauss comunicó estos descubrimientos a algunos de sus amigos, pero nunca se atrevió a publicarlos, ya que no le gustaba la controversia y en esa época se consideraba la geometría euclidiana como la única posible.

János Bolyai (húngaro, 1802-1860) y Nikolai Lobachevsky (ruso, 1793-1856), entre 1823 y 1836 independientemente redescubrieron la geometría hiperbólica, y ambos tuvieron el valor de publicar sus resultados. Por supuesto que ni Bolyai ni Lobachevsky conocían los trabajos de Gauss. Sin embargo durante su vida ninguno recibió el reconocimiento que tal trabajo merecía. Más aún, mucha gente repudiaba tales inventos, entre ellos C. L. Dodgson (inglés, 1832-1898), mejor conocido como Lewis Caroll, autor de *Alicia en el país de las maravillas*, quien calificó estos trabajos de muy poco útiles.

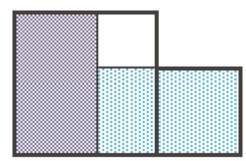
Carlos Bosch Giral

Demostraciones que explican

Una demostración en matemáticas tiene como objetivo no sólo ver que un resultado matemático es válido, sino también ayudarnos a entender por qué es cierto. Hanna (1990) sugiere que siempre que sea posible, debemos dar a nuestros alumnos pruebas que expliquen en vez de pruebas que sólo prueben. Vamos a ver unos ejemplos.

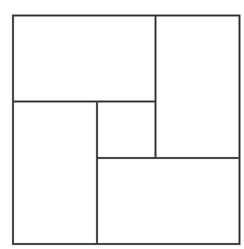
Ejemplo 1. Luis, un alumno de nivel medio, observó que si se tienen dos números distintos (digamos 3 y 4), la suma de los cuadrados (9 + 16 = 25) es más grande que el doble del producto de los números ($2 \times 3 \times 4 = 24$). Podemos expresar en general, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Considera la siguiente representación de la situación. Uno de los cuadrados es a^2 y el otro b^2. Cada uno de los rectángulos sombreados representa el producto ab. Claramente la suma de los cuadrados es mayor que la suma de los rectángulos.



La diferencia de los cuadrados y los rectángulos es un cuadrado de lado $(a - b)$, por lo que el diagrama nos permite también ver que $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$. Desde luego, esta igualdad se puede demostrar algebraicamente, y de ahí obtener la desigualdad de arriba.

Si añadimos dos rectángulos más de area ab, podemos formar un cuadrado de lado $a + b$.



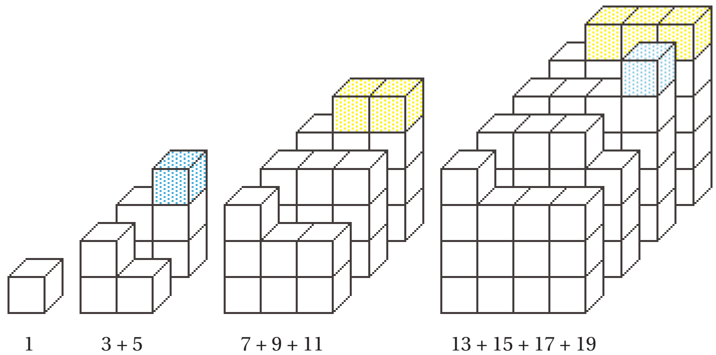
Es fácil ver que $(a + b)^2 \geq 4ab$, lo que es equivalente a $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$. De aquí se tiene que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, es decir, la media aritmética es mayor que o igual a la media geométrica de dos números.

Ejercicio. A partir de la desigualdad $a^2 + b^2 \geq 2ab$ demuestra que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

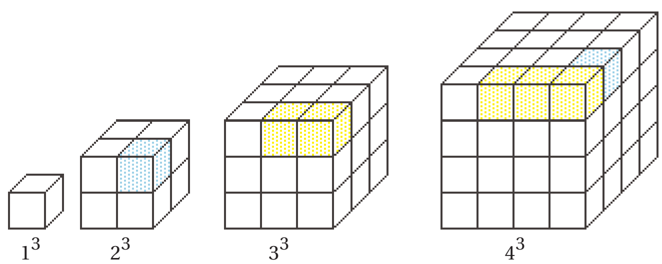
Ejemplo 2. Considera las siguientes sumas de números impares.

$$\begin{array}{cl}
1 & = 1 = 1^3 \\
3+5 & = 8 = 2^3 \\
7+9+11 & = 27 = 3^3 \\
13+15+17+19 & = 64 = 4^3
\end{array}$$

Podemos ver que en cada renglón la suma es un número cúbico. Para entender por qué esta relación es cierta en general, podemos representar los números por medio de cubitos. Los números impares en cada renglón se pueden representar de la siguiente manera.



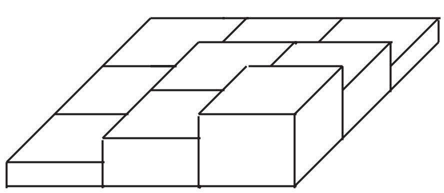
Si reacomodamos los cubos que sobran en las rebanadas de atrás y con ellos completamos las de adelante, podemos formar rebanadas del mismo tamaño. Por ejemplo, en el tercer grupo tendremos tres rebanadas de 9 cubos cada una. Notamos que el número de rebanadas en el n-ésimo grupo es n, cada una con n^2 cubitos. De este modo las rebanadas se pueden juntar para formar un cubo.



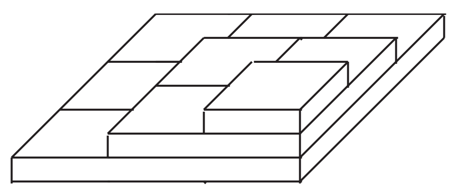
Ejemplo 3. Tenemos la siguiente matriz de $n \times n$, donde cada término está definido por $a_{ij} = \text{mín}(i, j)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Barbeau (1997, p. 21) sugiere pensar este arreglo de números en términos geométricos. Podemos imaginar que cada número está representado por una columna de base cuadrada. Todas las columnas tienen la misma base y las alturas de las columnas son proporcionales al número que representan. Este arreglo representa la suma de los términos en la matriz.



Podemos ver este arreglo de manera distinta, agrupando por rebanadas que están a la misma altura. Vemos que en cada rebanada hay un número cuadrado de "fichas."Este arreglo representa por tanto la suma de los primeros números cuadrados.



Referencias

Barbeau, Edward J. (1997). *Power play.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hanna, Gila. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1): 6-13.

Alfinio Flores Peñafiel

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.