Boletín de FICOM

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Boletín N.º 5 Septiembre, 2000.

Geometrías no Euclidianas 2

La geometría hiperbólica es el resultado de suponer que el quinto postulado de Euclides no se satisface. Ese postulado es equivalente al de las paralelas:

> *Por un punto fuera de una recta pasa una y sólo una paralela a esa recta.*

Este postulado se puede negar suponiendo, como en el caso de la geometría hiperbólica, que se tiene más de una recta que pasa por ese punto y que no interseca a esa recta. Pero también se puede negar diciendo:

> *Por un punto fuera de una recta no hay ninguna recta que pase por ese punto y que no interseque a la recta dada.*

Esto simplemente quiere decir que dos rectas cualesquiera tienen siempre un punto en común. Al negar el postulado de las paralelas de esta forma se obtiene la geometría elíptica.

Para entenderla mejor tratemos de ver de cerca cómo es la geometría en la superficie de una esfera. En la superficie de una esfera, por ejemplo la Tierra, la distancia más corta entre dos puntos está dada por el arco de círculo máximo que une esos dos puntos. Para los navegantes de los viejos tiempos era natural ver esos arcos como "segmentos de recta" de cierto tipo de geometría de dos dimensiones, la geometría esférica, la geometría de las figuras trazadas sobre la superficie de una esfera. Esta geometría fue estudiada inicialmente hacia el año 100 por Menelao y posteriormente en el año 1000 por los árabes. No es muy difícil convencerse que en esta geometría la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180°. Años después, entre 1852 y 1854, un matemático suizo, Schläfli, y otro alemán, Riemann (alumno de Gauss), concibieron de manera independiente la posibilidad de extender la geometría esférica a más de dos dimensiones. Las ideas que plasmaron tanto Riemann como Schläfli fueron posteriormente usadas por Einstein para la creación de su teoría de la relatividad.

Riemann era un matemático de primera línea. La profundidad y originalidad de sus ideas marcaron el curso de la geometría y el análisis, además éstas fueron la base para la creación de la topología. El nombre *geometría Riemanniana* se usa para un área altamente sofisticada de las matemáticas de la cual la geometría esférica es un simple ejemplo.

En la geometría elíptica no hay rectas paralelas, y lo mismo sucede en la geometría esférica, que es un modelo muy útil de la geometría elíptica. De manera similar a lo que pasa en la geometría hiperbólica, en la elíptica se calcula el área de un triángulo cuyos ángulos miden A, B y C de la siguiente manera:

$$\text{área } = \left(\frac{A+B+C}{180°} - 1\right)\pi$$

Es importante observar que la cantidad entre paréntesis es mayor que cero (para triángulos no degenerados) pues la suma de los ángulos internos de un triángulo, en esta geometría, es mayor que 180°.

A pesar de que Gauss, Bolyai y Lobachevsky vivieron y murieron pensando intuitivamente que su geometría (hiperbólica) era tan lógicamente consistente como la euclidiana, nunca lo demostraron. Fueron Felix Klein (1849-1925), Eugenio Beltrami (1835-1900) y Henri Poincaré (1854-1912) los que dieron las pruebas de que las geometrías elíptica e hiperbólica son tan consistentes como la geometría euclidiana, es decir que si en la geometría euclidiana no hay contradicciones lógicas tampoco las hay en las otras geometrías e inversamente.

Carlos Bosch Giral

¿Cuántas horas hay . . . ? (1a. parte)

Hace muchos años, se tenía la creencia de que varias de las ramas de las matemáticas no tenían aplicación alguna en problemas reales. Sin embargo, en los últimos tiempos se ha visto que hasta las ramas que se consideraron en algún tiempo inaplicables están siendo de gran utilidad para la resolución de diversos problemas en la actualidad. Éste es el caso de la Teoría de Números y, como ejemplo, he aquí un problema.

En una compañía de telefonía se quiere dar seguimiento al tiempo de atención de un reporte, esto es, ¿cuánto tiempo tarda en repararse alguna anomalía que se reporta en determinado momento? Se sabe que ésta no tarda más de un mes en atenderse y que no se dejan pendientes de un año a otro. Para contabilizar este tiempo, se necesita contar las horas hábiles transcurridas desde el momento en que se reporta hasta el momento en que se resuelve. La computadora registra la hora del día, mes y año en que es emitida la queja y la hora del día, mes y año cuando se soluciona. Para medir el tiempo transcurrido, en horas hábiles, es necesario saber que éstas se cuentan de las 8:00 a las 20:00 hrs. de lunes a viernes.

Para poder medir este lapso se ve que un problema importante es el de detectar en qué día de la semana se hace el reporte ya que, por ejemplo, si un reporte se hace un martes a las 10:00 y se le da salida el siguiente viernes a las 14:00, el tiempo que tardó en atenderse fue de 40 horas. Pero si el reporte se hizo en un viernes a las 10:00 y se le da salida el siguiente lunes a las 14:00, el tiempo que tardó en atenderse fue de 16 horas, a pesar de que en ambos casos fueron tres días de diferencia.

Para saber a qué día de la semana corresponde una fecha dada, haré una pequeña modificación en el número asignado a cada mes para que no afecten los años bisiestos en los que se agrega un día a febrero. Como mencioné en el artículo “¿En qué día nací?” que aparece en el N.º 11 del Boletín del Concurso de Primavera para Maestros, éstos son los años no seculares que son múltiplos de 4 o seculares múltiplos de 400, según la definición considerada desde 1582. También consideraré, como en el mencionado artículo, los días de la semana numerados de 0 a 6 empezando por el domingo.

Una fecha dada consta de día, mes y año. El día es un número entre 1 y 31, el mes un número entre 1 y 12 y el año un número de cuatro dígitos. Usaré la siguiente notación: $d =$ día para el mes y el año consideraré dos casos:

— Si mes $\neq 1$ y mes $\neq 2$, entonces el mes es $m =$ mes $- 2$ y el año es $a =$ año.

— Si mes = 1 o mes = 2, entonces el mes es $m = 10 +$ mes y el año es $a =$ año $- 1$.

En ambos casos, si $a = a_3a_2a_1a_0$, defino $C = a_3a_2$ y $U = a_1a_0$ (aquí a_3, a_2, a_1, a_0 son los dígitos que forman al número usando notación posicional), esto es, $a = 100C + U$.

Así, se considera el mes de marzo como el mes 1 de cada año y los meses de enero y febrero son los dos últimos meses del año anterior al de la fecha dada. Dos ejemplos de esta convención son los siguientes:

— Si la fecha dada es el 21 de mayo del año 2000, 21/05/2000, entonces $d = 21$ (es el día), $m = 3$ (es el mes), $a = 2000$ (es el año) y $C = 20$, $U = 00$.

— Si la fecha dada es el 21 de enero del año 2000, 21/01/2000, entonces $d = 21$ (es el día), $m = 11$ (es el mes), $a = 1999$ (es el año) y $C = 19$, $U = 99$.

Por tanto, para determinar el día de la semana que corresponde a una fecha dada se encontrará el día correspondiente a marzo 1 de dicho año, el cual se determinará a partir del día correspondiente a marzo 1 del año 1600 considerado como día de referencia, trabajando éstos módulo 7.

Sea d_a el día de la semana de marzo 1 del año a. Como entre marzo 1 del año $a-1$ y marzo 1 del año a hay 366 o 365 días dependiendo si el año es bisiesto o no, respectivamente, entonces

$$d_a \equiv d_{a-1} + 2 \pmod 7 \quad \text{o}$$
$$d_a \equiv d_{a-1} + 1 \pmod 7$$

puesto que $365 \equiv 1 \pmod 7$.

Ahora, para encontrar d_a a partir de d_{1600} se necesita saber cuántos años bisiestos hay entre 1600 y a sin incluir 1600 e incluyendo a. Sea b este número, entonces

$b =$(# de años divisibles por 4) $-$ (# de años divisibles por 100) $+$ (# de años divisibles por 400).

Es decir,

$$b = \left[\frac{a-1600}{4}\right] - \left[\frac{a-1600}{100}\right] + \left[\frac{a-1600}{400}\right]$$

en donde $\left[\frac{a-1600}{4}\right]$ denota la parte entera del número $\frac{a-1600}{4}$.

Al sustituir $a = 100C + U$ y simplificar se obtiene que

$$b = 25C + \left[\frac{U}{4}\right] - C + \left[\frac{C}{4}\right] - 388 \Rightarrow$$
$$b \equiv 3C + \left[\frac{U}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 3 \pmod 7$$

Como $d_a \equiv d_{1600} + a - 1600 + b \pmod 7$, sustituyendo b y simplificando se obtiene que

$$d_a \equiv d_{1600} - 2C + U + \left[\frac{C}{4}\right] + \left[\frac{U}{4}\right] \pmod 7$$

De aquí, considerando que marzo 1 de 2000 fue miércoles se puede encontrar el día de la semana que fue marzo 1 de 1600, esto es, en este caso se tiene $a = 2000, C = 20, U = 0$ y $d_{2000} = 3$, de donde se tiene

$$3 \equiv d_{1600} - 40 + 0 + 5 + 0 \equiv d_{1600} - 35 \pmod 7$$

o sea, $d_{1600} = 3$ que significa que marzo 1 de 1600 fue miércoles.

Así se obtiene que para cualquier año a, el día de la semana que corresponde a marzo 1 es $d_a \equiv 3 - 2C + U + \left[\frac{C}{4}\right] + \left[\frac{U}{4}\right] \pmod 7$. Ahora, para usar esta fórmula se cuenta el número de días de la semana que el día 1 de un mes particular aumenta respecto del día 1 del mes anterior. Este número será 2 o 3 dependiendo de que el mes anterior tenga 30 o 31 días, puesto que $30 \equiv 2 \pmod 7$. Por ejemplo de marzo 1 a abril 1 hay 3 días de diferencia, mientras que de abril 1 a mayo 1 sólo son 2 días. El total de días que se incrementan en un año es 29, por lo que es un promedio de 2.6 días de incremento por mes. Al multiplicar $2.6(m-1)$ y redondear[1] a una cifra entera se obtiene el incremento del mes $m-1$ al mes m para m de 2 a 12 y cero cuando $m = 1$. Si denoto por $\mathrm{Rnd}(2.6(m-1))$ al número que se obtiene después de redondear, el primer día del mes m del año a corresponde al mínimo residuo no negativo de

$$d_a + \mathrm{Rnd}(2.6(m-1)) \pmod 7$$

De esta manera, si denoto por W al día de la semana correspondiente al día d del mes m del año a sólo tengo que sumar $d-1$ a la fórmula anterior y obtener la fórmula:

$$W \equiv d - 1 + d_a + \mathrm{Rnd}(2.6(m-1)) \pmod 7 \Rightarrow$$
$$W \equiv d - 1 + 3 - 2C + U + \\ + \left[\frac{C}{4}\right] + \left[\frac{U}{4}\right] + \mathrm{Rnd}(2.6(m-1)) \pmod 7 \Rightarrow$$
$$W \equiv d + 2 - 2C + U + \\ + \left[\frac{C}{4}\right] + \left[\frac{U}{4}\right] + \mathrm{Rnd}(2.6(m-1)) \pmod 7$$

Por ejemplo, para obtener el día de la semana correspondiente a la fecha 29/02/2000 se tiene $d = 29$, $C = 19$, $U = 99$, $m = 12$, de donde,

$$W \equiv 29 + 2 - 2(19) + 99 + \left[\frac{19}{4}\right] + \left[\frac{99}{4}\right] + \\ + \mathrm{Rnd}(2.6(12-1)) \pmod 7 \\ \equiv (92 + 4 + 24 + 29) \equiv (149) \equiv 2 \pmod 7$$

esto es, el 29 de febrero de 2000 fue martes.

Marcela González Peláez

Cómo encontrar puntos racionales en cónicas

Consideremos la elipse $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Si nosotros quisiéramos localizar puntos en el plano que pertenezcan a esa curva es muy probable que las coordenadas del punto no sean racionales, por ejemplo si $x = 2$, los puntos de la curva con coordenada x igual a 2 son

$$\left(2, -2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \text{ y } \left(2, -2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

[1] Por ejemplo, el número decimal $3.x$ se redondea como 3 si $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y como 4 si $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Es evidente que ambas coordenadas en y son irracionales.

Una técnica para poder encontrar todos los puntos con coordenadas racionales de la gráfica de una cónica, conociendo al menos un punto con coordenadas racionales es la siguiente:

Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto dado de coordenadas racionales que pertenece a la gráfica y sea $Q = (x_1, y_1)$ otro punto de la curva también con coordenadas racionales. La pendiente de la recta que pasa por P y Q es un número racional. Inversamente, si m es un número racional y consideramos la recta que pasa por P con pendiente m, despejamos y de la ecuación de esa recta y la sustituimos en la ecuación de la cónica, obtenemos una ecuación de segundo grado en x. Como sabemos, una de las raíces (la coordenada x del punto original) es racional y por lo tanto la otra también lo es. Una vez que tenemos la coordenada x, la sustituimos en la ecuación de la recta y tenemos una ecuación de primer grado con una incógnita (y) con coeficientes racionales. Esta técnica da una biyección entre los números racionales m y los puntos con coordenadas racionales en la cónica.

Veamos como ejemplo nuestra elipse original. La ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$
$$\text{o} \quad 9(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 36$$
$$\text{o} \quad 9(x-3)^2 + 4(y+2)^2 - 36 = 0 \tag{1}$$

Sea m un número racional. Como el punto $P = (1, -2)$ pertenece a la curva y tiene coordenadas racionales, lo podemos usar para encontrar los demás puntos de la curva con coordenadas racionales.

La ecuación de la recta que pasa por $P(1, -2)$ y tiene pendiente m es

$$y = m(x-1) - 2 \tag{2}$$

Si sustituimos el valor de y en (1), tenemos

$$\begin{aligned} 9(x-3)^2 + 4m^2\,(x-1)^2 - 36 &= \\ &= 9x^2 - 54x + 45 + 4m^2x^2 - 8m^2x + 4m^2 = 0 \end{aligned}$$

y factorizando, sabiendo que 1 es una raíz, obtenemos

$$(x-1)(9x + 4m^2x - 4m^2 - 45) = 0$$

De aquí que el valor de x es $\dfrac{4m^2+45}{9+4m^2}$. Sustituyendo el valor de x en (2), obtenemos

$$y = \frac{36m - 8m^2 - 18}{4m^2 + 9}$$

el cual es claramente racional ya que m lo es. Por lo tanto, los puntos de coordenadas racionales de esta elipse son los puntos de la forma

$$\left(\frac{4m^2+45}{9+4m^2}, \frac{36m - 8m^2 - 18}{4m^2+9}\right)$$

donde m es cualquier número racional.

Es importante notar que esta técnica funciona para cualquier cónica si conocemos al menos un punto con coordenadas racionales, sin embargo puede fallar si la curva es un polinomio de grado mayor que dos en alguna de las variables o si no tenemos ningún punto original como base. Por ejemplo el círculo $x^2 + y^2 = 3$ no tiene ningún punto de coordenadas racionales en su gráfica, ya que si hubiera un punto $\left(\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}\right)$ de coordenadas racionales tendríamos que $(p_1q_2)^2 + (q_1p_2)^2 = 3(q_1q_2)^2$. Si analizamos la ecuación diofantina $x^2 + y^2 = 3z^2$ vemos que no tiene soluciones enteras pues suponemos que (x, y, z) es una solución con x, y, z primos relativos (lo cual se puede hacer dado que podemos sacar el máximo común divisor al cuadrado en cada sumando y cancelarlo), como la suma de dos cuadrados módulo 3 es cero si y sólo si cada cuadrado es divisible por tres y por lo tanto por nueve tenemos que 3 divide a x y a y. Si sustituimos en la ecuación tenemos que z también es divisible por tres, lo cual es una contradicción ya que eran primos relativos. También se puede obtener este resultado recordando que un número entero es la suma de dos cuadrados si y sólo si los primos de la forma $4n+3$ aparecen elevados a una potencia par y en nuestra ecuación el 3 aparece elevado a una potencia impar.

Javier Alfaro

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.