Boletín de FICOM

FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

Boletín N.º 6 Octubre, 2000.

¿Cuántas horas hay . . . ? (2a. parte)

Volviendo al problema planteado originalmente en la primera parte de este artículo (en el número anterior de este Boletín), quiero calcular el número de horas hábiles que hay entre la hora/fecha de entrada de un reporte $h/d/m/a$ y la hora/fecha en la que éste se soluciona $h'/d'/m'/a'$, considerando que éste tarda a lo más un mes en atenderse. Sea t el tiempo de reparación. Determinaré t considerando tres casos en los que siempre $a' = a$.

1er. Caso. $m' = m$ y $d' = d$. Aquí es inmediato que $t = h' - h$.

2o. Caso. $m' = m$ y $d' \neq d$. Aquí se tienen que contar las horas hábiles usadas el día d, más las horas hábiles usadas el día d', más las horas hábiles de los días que se encuentran entre d y d'. Sea W el día de la semana correspondiente al día d y sea s el número de fines de semana entre d y d', entonces $0 \leqslant s \leqslant 4$ y se puede obtener como $s = \left[\frac{d'-d+W}{7}\right]$. De esta manera,

$$t = (20 - h) + (h' - 8) + (d' - d - 1 - 2s) \cdot 12.$$

3er. Caso. $m' \neq m$. Aquí se cuentan las horas hábiles del mes m más las horas hábiles del mes m'.

— Si $m = 2, 4, 7$ o 9, entonces el mes m tiene 30 días, de donde, el número de horas hábiles del mes m es:

$$t_1 = (20 - h) + (30 - d - 2s_1) \cdot 12,$$

donde $s_1 = \left[\frac{30-d+W_1}{7}\right]$ y $W_1 =$ día de la semana correspondiente a d.

El número de horas hábiles del mes m' es:

$$t_2 = (h' - 8) + (d' - 1 - 2s_2) \cdot 12,$$

donde $s_2 = \left[\frac{d'-1+W_2}{7}\right]$ y $W_2 =$ día de la semana del día 1 del mes m'.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= (20 - h) + (30 - d - 2s_1) \cdot 12 \\ &\quad + (h' - 8) + (d' - 1 - 2s_2) \cdot 12 \\ &\Rightarrow t = (20 - h) + (h' - 8) \\ &\quad + (29 + d' - d - 2(s_1 + s_2)) \cdot 12, \end{aligned}$$

donde $s_1 = \left[\frac{30-d+W_1}{7}\right]$ y $W_1 =$ día de la semana correspondiente a d y $s_2 = \left[\frac{d'-1+W_2}{7}\right]$ y $W_2 =$ día de la semana correspondiente al día 1 del mes m'.

— Si $m \neq 2, 4, 7, 9$ y 12, entonces m tiene 31 días y haciendo un cálculo similar al anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} t &= (20-h) + (h'-8) \\ &\quad + (30 + d - d - 2(s_1 + s_2)) \cdot 12, \end{aligned}$$

donde $s_1 = \left[\frac{31-d+W_1}{7}\right]$ y $W_1 =$ día de la semana correspondiente a d y $s_2 = \left[\frac{d'-1+W_2}{7}\right]$ y $W_2 =$ día de la semana correspondiente al día 1 del mes m'.

De esta forma se observa que usando un poco de divisibilidad en los enteros, la función parte entera y haciendo un poco de cuentas se pueden obtener resultados que pueden ser de gran utilidad en problemas cotidianos.

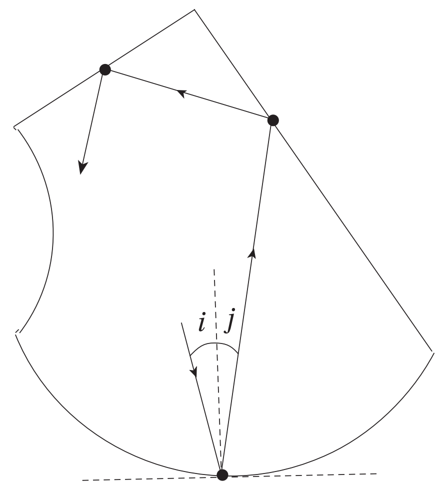
Marcela González Peláez

Billares circulares

Los billares de los que hablamos aquí son un poco diferentes a los que estamos acostumbrados, pues no son billares rectangulares y solamente usaremos una bola.

Según las leyes de la mecánica, cuando una bola de billar choca con la “banda” del billar, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. La igualdad de estos ángulos es verdadera para bolas de billar ideales, es decir como dicen físicos: “de dimensiones despreciables en las condiciones del experimento”. Consideremos entonces que una bola es un punto móvil del que se puede seguir la trayectoria, respetando las leyes de la reflexión.

Consideraremos mesas de billar de forma arbitraria, cuando el borde o banda es curvo, la bola rebota conforme a las leyes de la reflexión es decir, que en el punto de el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión respecto a la tangente a la curva en ese punto y si la bola llega a un punto donde no hay recta tangente, entonces supondremos que ahí la bola se muere.



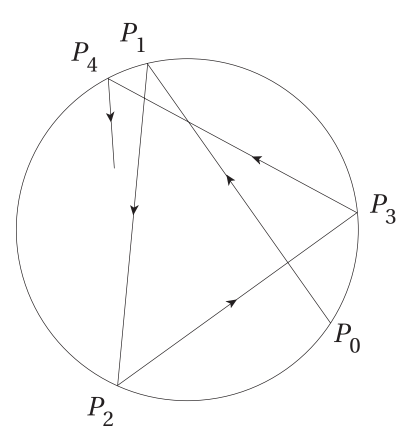
$\angle i = \angle j$

Por ejemplo una mesa de billar puede ser un círculo, un triángulo o un cuadrilátero entre otras figuras posibles.

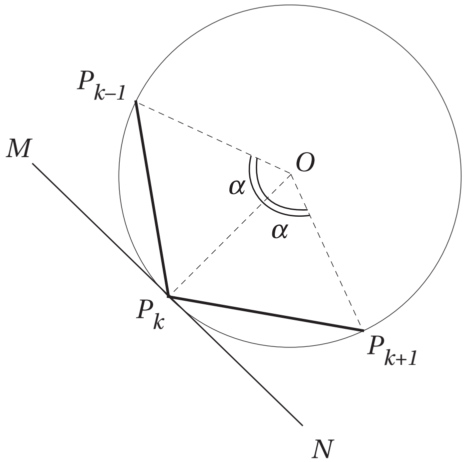
Dado un punto P del billar, supondremos se puede trazar la trayectoria que la bola recorre: $PP_1P_2P_3\ldots$. En caso de que la bola no caiga en un punto anguloso, la bola se desplazará tanto tiempo como queramos. Puede darse el caso que la trayectoria regrese a $PP_1\ldots$ en cuyo caso es claro que la bola repite la trayectoria que ya se describió, en ese caso decimos que la trayectoria es periódica. En términos geométricos esas son trayectorias que describen curvas que son cerradas inscritas en cierto dominio D (la mesa de billar) y que satisfacen la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión. El billar con el que trabajaremos aquí es de forma circular. Hay varias preguntas que nos podemos hacer:

¿Existen trayectorias periódicas? ¿Cuántas? ¿Cómo son? ¿Cómo reconocerlas?¿Por dónde se desplaza la bola cuando recorre una trayectoria no periódica?

Consideremos un billar β en forma de disco, es decir, con frontera o “bandas” circulares C. Las trayectorias van a estar perfectamente determinadas por la sucesión de puntos $P_0P_1P_2P_3P_4P_5\ldots$

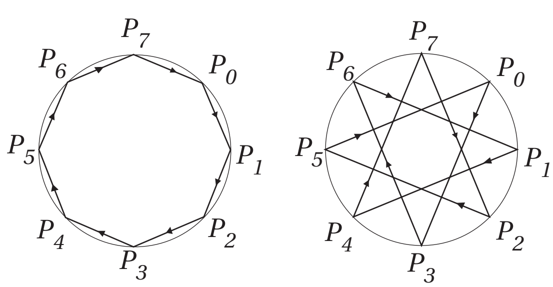


En cada uno de los puntos P_i tenemos la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión. De esta propiedad se sigue que los segmentos $P_{k-1}P_k$ son iguales, pues los ángulos $P_{k-1}P_kM$ y $P_{k-1}P_kN$ son iguales de manera que $P_{k-1}OP_k$ y P_kOP_{k+1} también, pues intersecan el mismo arco.



Así que $P_{k-1}P_k$ es igual a P_kP_{k-1}. Cada vértice P_i se obtiene del anterior por una rotación de ángulo α y centro O, el centro del círculo. De manera que P_n se obtiene de P_0 por medio de una rotación de ángulo $n\alpha$, de modo que la naturaleza de la trayectoria está enteramente determinada por el valor del ángulo α.

Si α es conmensurable con 2π, es decir si la razón $\frac{\alpha}{2\pi}$ es racional, entonces la trayectoria es periódica. Si $\frac{\alpha}{2\pi}$ es irracional, la trayectoria correspondiente es no periódica. En efecto, supongamos que α y 2π son conmensurables, es decir que $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$ con m y n enteros. Entonces $n\alpha = 2m\pi$ y si se hace una rotación con un ángulo $n\alpha$, se deja fijo cada punto del círculo. En particular, si nos fijamos en los vértices se tiene que $P_n = P_0, P_{n+1} = P_1 \ldots$. De modo que la trayectoria es periódica. Si $\frac{m}{n}$ es irreducible, es decir si $\frac{m}{n}$ no se puede reducir, la trayectoria correspondiente está exactamente formada por n segmentos $P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}, P_0, \ldots$ Si m es igual a 1 se obtiene un polígono regular de n lados. Para m igual a 2 ó más se obtiene un polígono estrellado inscrito en un círculo.



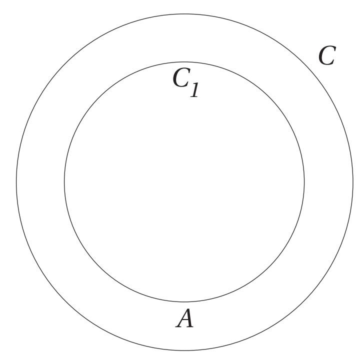
Veamos que el recíproco es cierto: si una trayectoria $P_0, P_1, P_2, \ldots$ es periódica, entonces α y 2π son conmensurables. Por la periodicidad de la trayectoria los vértices se repiten.

$$P_n = P_0, P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2, \ldots$$

Esto significa que después de una rotación de $n\alpha$ el punto P_0 queda invariante, de modo que $n\alpha$ es un múltiplo de 2π, de donde se sigue que $\frac{\alpha}{\pi} = 2\frac{m}{n}$.

Inversamente, si α es inconmensurable con 2π la trayectoria correspondiente está formada por una sucesión infinita de segmentos iguales $P_0P_1, P_1P_2, \ldots$ inscritos en el círculo.

Como los segmentos son todos iguales, sus puntos medios están a la misma distancia del centro del círculo y por lo tanto todos esos segmentos están sobre un círculo C_1, concéntrico a C.

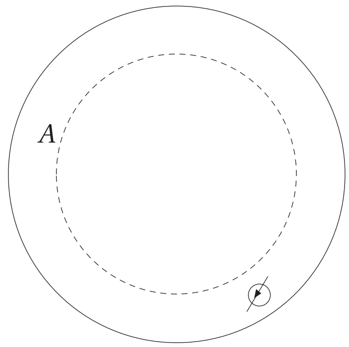


Todos los segmentos de la trayectoria son tangentes a ese círculo y la trayectoria nunca penetra dentro de C_1. Dicho de otra forma, la trayectoria está enteramente contenida en el anillo A, determinada por los círculos C y C_1.

Podemos ahora enunciar un teorema que nos da propiedades de este tipo de trayectorias.

Si α y 2π son inconmensurables, entonces cada trayectoria correspondiente al ángulo α, en un billar circular, es denso en todas partes del anillo A.

El término más importante en este teorema es "denso en todas partes", lo cual significa que la bola de billar que sigue esa trayectoria pasará en algún momento por cualquier parte del anillo, no importa que tan pequeña sea. Es decir que si en el anillo A nos tomamos una pequeña región, podemos asegurar que en algún momento la trayectoria pasará por esa región.



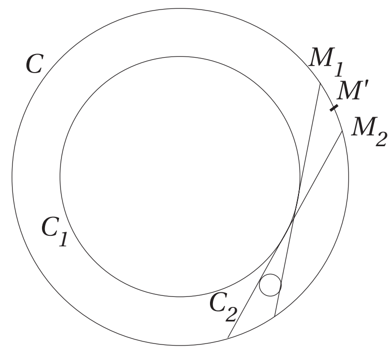
Veamos la prueba de este teorema:

Sea $P_0P_1P_2\ldots$ la trayectoria no periódica que consideramos. Veamos primero que los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots$ se reparten de manera densa sobre el círculo. Es decir que si $\{P_k\} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ una sucesión de puntos en el círculo tales que P_{k+1} se obtiene de P_k por medio de una rotación de ángulo central α. Entonces si α y 2π son inconmensurables, la sucesión P_k es densa en todas partes en el círculo es decir que cualquier pedazo de arco contendrá al menos un punto P_k.

Ahora tomemos un punto fijo P_0 sobre el círculo. Siguiendo sobre el círculo obtenemos nuevos puntos $P_1, P_2, \ldots$ todos a una "distancia α", sobre el arco de círculo. Después de un momento vamos a pasar al punto P_0.

Entonces ya sea el punto antes de pasar a P_0 o el de después, P_n, está a una distancia β de P_0 que es menor o igual $\frac{\alpha}{2}$. Desde ese punto P_n volvemos a hacer el mismo número de pasos hasta llegar al punto P_m que dista β del punto P_n. Podemos ahora considerar que nos estamos desplazando de un ángulo $\beta\,(\leq \frac{\alpha}{2})$ sobre el círculo. Definamos P'_n con respecto a P_n de manera análoga a como se definió P_n con respecto a P_0, este dista $\gamma \leq \frac{\beta}{2}$ del punto P_n es decir $\gamma \leq \frac{\alpha}{4}$. Así haciendo k veces la operación, sustituimos la "longitud" α de inicio por la "longitud" $\frac{\alpha}{2^k}$. Para k grande, esta longitud es tan pequeña como queramos así que no importa el pedazo de círculo que tomemos, siempre caerá uno de los puntos de la trayectoria en él. Por el momento tenemos que los vértices de la trayectoria son densos sobre el círculo. Consideremos C_2, un círculo en el anillo A. Vamos a ver que existe una trayectoria que pasa por al menos un punto interior de ese círculo.

Tomemos el arco de círculo M_1M_2 sobre C determinado por las tangentes comunes a los círculos C_1C_2. Es claro que la tangente a C_1 que pasa por M' un punto cualquiera del arco M_1M_2 corta a C_2.



Consideremos la trayectoria $P_0, P_1, \ldots$ por lo que vimos antes hay un punto P de esa trayectoria en el arco M_1M_2, si de ese punto P trazamos la tangente a C_1, esa tangente es un segmento de la trayectoria que interseca a C_2 por lo que tenemos que la trayectoria es densa en todas partes del anillo A.

Con esto podemos dar por terminado el estudio de los billares circulares pero para el lector interesado dejaremos en el aire una pregunta:

¿Cómo son las trayectorias en un semidisco, en un cuarto de disco? Se puede tratar de llevar este problema al estudio que se acaba de hacer sobre el disco.

Carlos Bosch Giral

Problemas

1. Se corta un rectángulo de 20×30 de una hoja cuadriculada. ¿Es posible trazar una línea recta que interseque los interiores de 30 cuadrados del rectángulo?
2. Se escriben los números naturales desde 1 hasta 64 en los escaques de un tablero de ajedrez y cada número se escribe una sola vez. Demostrar que hay algún par de números en escaques vecinos tales que difieren en al menos 5.
3. Se da un número de 6 dígitos. ¿Cuántos números de 7 dígitos existen tales que, al tachar un dígito en ellos, se obtenga el número dado?

Óscar Chávez

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.