F E D E R A C I Ó N I B E R O A M E R I C A N A D E C O M P E T I C I O N E S M A T E M Á T I C A S

# Boletín de FICOM

ACADEMIA MEXICANA DE CIENCIAS

*Antes* **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

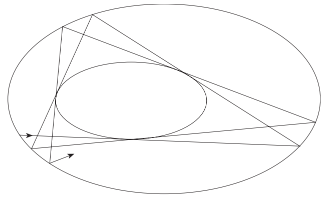
Boletín N.º 7 Noviembre, 2000.

## Billares convexos

En un artículo anterior publicado en este boletín analizamos los billares circulares. En esta ocasión vamos a estudiar qué sucede con las trayectorias de una bola en una mesa de billar convexa en la cual no hay puntos angulosos, es decir que la frontera es suave, no tiene picos. Este tema ha sido estudiado por un gran número de matemáticos y los trabajos que han producido no son elementales. Aquí sólo comentaremos un par de resultados interesantes.

1. Siempre hay un número infinito de trayectorias periódicas. Además existen trayectorias periódicas formadas por $n$ segmentos, por supuesto con $n \geq 3$. Este resultado se debe a Henri Poincaré, matemático francés de principios del siglo XX.

2. En el caso general, al interior de un dominio $D$ con frontera $C$, la mesa de billar, se puede encontrar una familia de curvas $C_i$ que satisfacen la siguiente propiedad: si el segmento inicial de una trayectoria es tangente a cierta curva, los demás segmentos que forman la trayectoria son todos tangentes a una misma curva $C_i$. En realidad, lo que esos segmentos determinan es la envolvente de esa curva que se le llama caústica.



Cuando el dominio es un disco ya vimos que las caústicas son círculos interiores concéntricos.

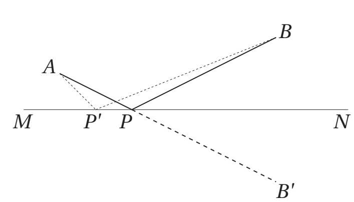
Demostrar que existen caústicas es siempre muy difícil. Con argumentos realmente elaborados se puede probar el análogo a una propiedad que vimos en el círculo: casi todas las trayectorias que son tangentes a una caústica dada $C_i$ *llenan* de manera densa el anillo que se encuentra entre $C$ y $C_i$.

Los matemáticos probaron que las trayectorias de billar en un dominio $D$ y las caústicas de $D$ están estrechamente ligadas con lo que se llama la vibración de una membrana delgada con la forma de $D$. Dicho de otra forma, si se fabrica un tambor con la forma del dominio $D$ donde el bastidor tenga la forma $C$, los sonidos que emite ese tambor están ligados a las propiedades geométricas de las trayectorias de billar correspondientes. Usando ese análisis se puede decir que se puede *escuchar la forma de un tambor*. Ese es el título de un artículo importantísimo del matemático M. Kac.

### Trayectorias mínimas

Para construir una trayectoria sobre un billar entre los puntos $A$ y $B$ con un solo rebote respecto a la banda o borde $MN$, siendo éste una recta, basta aplicar una reflexión.

Construimos el punto $B'$ simétrico de $B$, unimos $A$ con $B'$; el punto de intersección de $AB'$ con $MN$ es un punto $P$ donde la bola hará contacto con $MN$ de tal modo que $APB$ es una trayectoria de tipo billar entre $A$ y $B$ rebotando en $MN$.

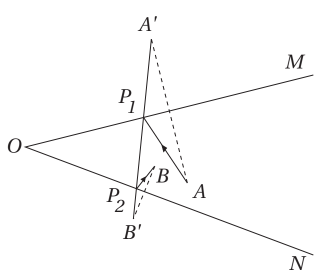


De esta construcción es claro que la trayectoria $APB$ es la más corta posible, ya que todas las trayectorias $AP'B$ con $P'$ sobre $MN$ tienen longitud $AP'B$ que es igual a $AP'B'$ por las propiedades de la simetría. Por lo tanto la distancia más corta entre $A$ y $B'$ es la que está dada por la trayectoria $APB'$ que corresponde al segmento de recta que va de $A$ a $B'$ y por lo tanto a la trayectoria $APB$.

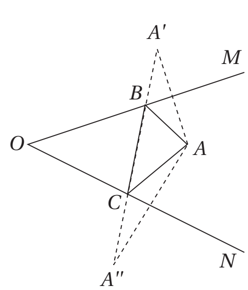
Esta propiedad forma parte de un principio más general: la bola de billar escoge el camino más corto posible.

Este principio es el que se aplica en el problema del granjero que aparece en el libro *Matemáticas: Perejil de todas las salsas* de R. Berlanga, C. Bosch y J. J. Rivaud, publicado en México por el Fondo de Cultura Económica en 1999.

Nos podríamos plantear ahora el problema con más rebotes. Por ejemplo si $MON$ es un ángulo agudo y $A$ y $B$ son puntos al interior, para construir la trayectoria de billar que sale de $A$, toca a $OM$ en $P_1$, toca a $ON$ en $P_2$ y pasa por $B$, lo que debemos hacer es tomar $A'$, el simétrico de $A$ respecto a $OM$, y $B'$, el simétrico de $B$ respecto a $ON$. La recta $A'B'$ corta a $OM$ en el punto $P_1$ que es el que estamos buscando y a la recta $ON$ en el punto $P_2$ de manera que $AP_1P_2B$ resulta ser una trayectoria de billar.



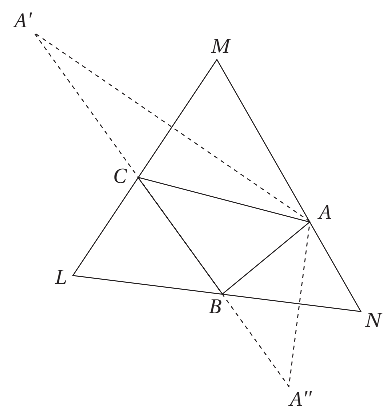

Sea nuevamente un ángulo agudo $MON$ y $A$ un punto dentro del ángulo, donde debemos colocar dos puntos $B$ y $C$ tales que $B$ y $C$ estén en distintos lados de $MON$ ($OM$ o $NO$) tal que el perímetro del triángulo sea mínimo. Este problema no es más que un caso particular del problema anterior, en el que los puntos dentro del ángulo coinciden. Así que podemos proceder de manera análoga, tomando $A'$, el simétrico de $A$ respecto a $OM$, y $A''$, el simétrico respecto a $ON$, y así unir $A'A''$ para encontrar $B$ y como se indica en la figura.



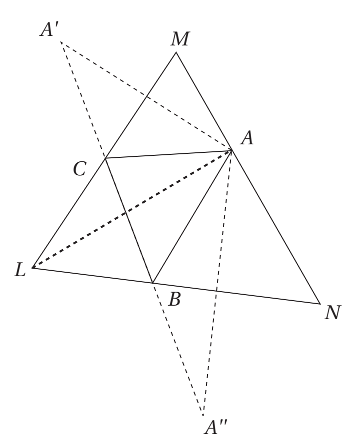

Ahora estamos listos para plantear y resolver un problema muy famoso, el problema de Faniano.

Dado un triángulo $MNL$, inscribir un triángulo $ABC$ cuyo perímetro sea mínimo y cada vértice de $ABC$ esté colocado sobre cada uno de los lados de $MNL$.

Primero, sin pérdida de generalidad tomemos un punto fijo $A$ sobre $MN$ y apliquemos la construcción anterior, así tenemos un triángulo de perímetro mínimo empezando en el punto $A$. Ahora debemos mover el punto $A$ sobre $MN$ para obtener el triángulo que tenga perímetro mínimo dependiendo de donde esté $A$. Observemos que el hacer la construcción anterior, la longitud de $A'A''$ representa el perímetro del triángulo.




Además el triángulo $A'LA''$ siempre va a ser isósceles ya que $LA' = LA = LA''$ y el ángulo $A'LA''$ será el doble del ángulo $MLN$, de manera que el triángulo $LA'A''$ siempre será semejante a él mismo cuando $A$ se mueve sobre $MN$. La longitud $A'A''$ será mínima cuando $LA' = LA''$ sea mínima, y como $LA' = LA'' = LA$ el perímetro será mínimo cuando $LA$ sea mínimo es decir cuando $A$ sea el pie de la altura por $L$. De modo que el triángulo de perímetro mínimo se obtendrá cuando $A$ sea el pie de la altura sobre $MN$.

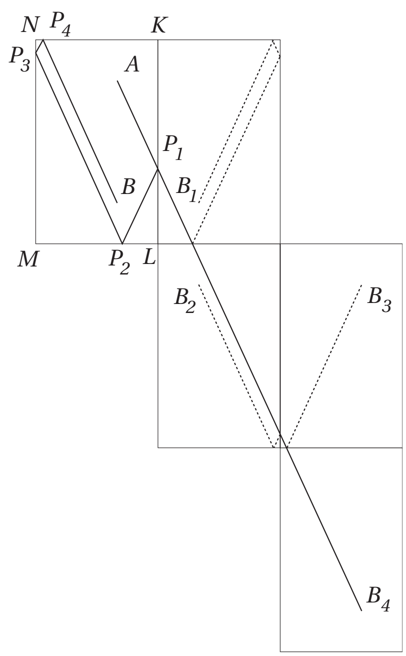


### Tiro de cuatro bandas

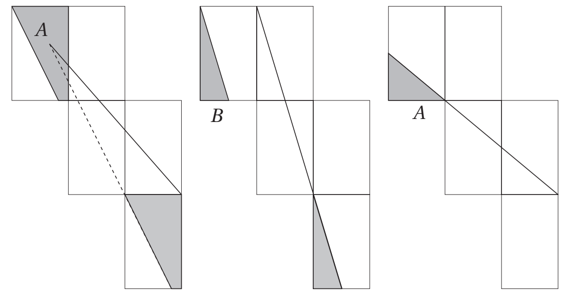
Ahora vayamos a uno de esos billares que conocemos bien, un billar rectángular $KLMN$ y nos vamos a plantear el siguiente problema:

Tomemos dos bolas $A$ y $B$, ¿hacia dónde tiene que ser lanzada la bola $A$ para que después de cuatro rebotes sucesivos en los lados $KL$, $LM$, $MN$ y $NK$ llegue al punto donde está la bola $B$? ¿Tenemos siempre una solución? ¿Será la trayectoria que buscamos siempre el camino más corto, empezando en $A$, golpeando los bordes en el orden indicado y terminando en $B$?

Consideremos el punto $B$ dentro del rectángulo $KLMN$ y tomemos simetrías sucesivas respecto a $KL, LM, MN$ y $NK$ como se indica en la figura, en realidad la primera simetría es respecto a $KL$ y la segunda respecto al simétrico de $LM$ respecto a $KL$, etc ... Al hacer estas cuatro simetrías se obtienen sucesivamente los puntos $B_1, B_2, B_3$ y $B_4$. Tracemos la recta $AB_4$, retomando las simetrías obtenemos los puntos $P_1, P_2, P_3$ y $P_4$ que determinan la trayectoria $AP_1P_2P_3P_4B$. Es claro que esa trayectoria es el camino más corto que lleva de $A$ hasta $B$ tocando las cuatro bandas a lados de la mesa.




Observemos que el problema no siempre tiene solución para cada posición del punto $A$, el punto $B$ debe encontrarse en la *zona de tiro* correspondiente, que es la zona sombreada de la figura. Además de que hay una zona muerta para $B$ y hay otra para $A$ que es en donde no importa donde esté $B$, nunca podremos alcanzarlo con una trayectoria del tipo pedido. En las siguientes figuras está sombreadas esas zonas.



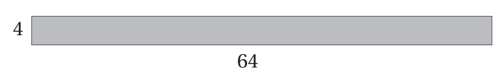

*Carlos Bosch Giral*

---

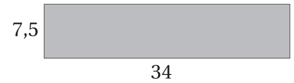
### Las raíces de Newton

Un método muy efectivo para calcular raíces cuadradas fue propuesto por Newton en 1674. Si bien las ideas en las que se basó Newton apelan a los rudimentos del Cálculo, mostraremos aquí una idea geométrica más elemental. Para obtener la raíz cuadrada de $a$, construiremos una sucesión de rectángulos todos de área $a$ y de modo que la base de cada uno de ellos se obtenga promediando la base y la altura del rectángulo anterior. Así las bases y las alturas se irán pareciendo cada vez más entre sí y, por lo tanto, los rectángulos se irán aproximando a un cuadrado de área $a$ y de lado $\sqrt{a}$. Mostremos en un ejemplo cómo funciona el método.

Sabemos que $16^2 = 256$. Calcularemos $\sqrt{256} = 16$ construyendo rectángulos de área $256$. Comencemos con uno de $64 \times 4$:




La base del segundo rectángulo se obtiene promediando la base y la altura del primer rectángulo: $b_2 = \dfrac{b_1 + h_1}{2} = \dfrac{64+4}{2} = 34$. Para obtener la altura $h_2$ debemos tener en cuenta que el rectángulo debe tener área $256$. Esto es $h_2 = \dfrac{256}{b_2} = \dfrac{256}{34} \approx 7{,}5$ (en lo que sigue aproximamos al primer decimal)



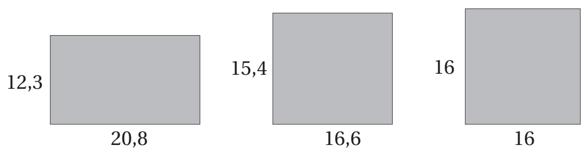

Como se puede ver, el segundo rectángulo es «más cuadrado» que el primero. Construyamos el tercer rectángulo:

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} = \frac{34 + 7{,}5}{2} \approx 20{,}8$$
$$h_3 = \frac{256}{20{,}8} \approx 12{,}3$$

El cuarto rectángulo se parece aún más a un cuadrado:

$$b_4 = \frac{b_3 + h_3}{2} = \frac{20{,}8 + 12{,}3}{2} \approx 16{,}6$$
$$h_4 = \frac{256}{16{,}6} \approx 15{,}4$$

El siguiente rectángulo, con las aproximaciones hechas, da un cuadrado. Las figuras que aparecen abajo ilustran estos últimos cálculos.




En realidad, podemos prescindir de la construcción de los rectángulos. Lo que interesa son los sucesivos valores de las bases $b_n$. En el ejemplo, fijado $b_1$, la siguiente base se obtiene mediante

$$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} = \frac{b_1 + \frac{256}{b_1}}{2} = \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{256}{b_1}\right)$$

En general, si queremos calcular $\sqrt{a}$, las sucesivas bases de los rectángulos se obtienen mediante la fórmula recurrente

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a}{b_n}\right)$$

Por ejemplo, para calcular $\sqrt{5}$ a partir de $b_1 = 1$ tenemos:

$$b_2 = \frac{1}{2}(1+5) = 3$$
$$b_3 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3} \approx 2{,}3333$$
$$b_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{15}{7}\right) = \frac{47}{21} \approx 2{,}2381$$
$$b_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{47}{21} + \frac{105}{47}\right) =\approx 2{,}236067$$

¡El último número coincide con $\sqrt{5}$ en sus primeras 6 cifras decimales!

Es interesante ver que esta misma idea sirve para calcular raíces cúbicas y, en general, para calcular raíces $n$-ésimas. La idea consiste en construir *hiperprismas* de «volumen» fijo y de base *hipercúbica* de modo que su arista se obtenga promediando las aristas del *hiperprisma* anterior. Por ejemplo para calcular $\sqrt[3]{10}$, se construye una sucesión de prismas de volumen fijo igual a 10 y de base cuadrada. Empezamos con un prisma de base cuadrada de lado $l_1 = 1$ y altura $h_1 = \frac{10}{1^2} = 10$.

El siguiente prisma tiene base de lado $l_2 = \frac{2l_1 + h_1}{3} = 4$ y altura $h_2 = \frac{10}{l_2^2} = \frac{10}{16} = 0{,}625$.

El tercer prisma tiene base de lado $l_3 = \frac{2l_2 + h_2}{3} \approx 2{,}875$ y altura $h_3 = \frac{10}{l_3^2} = 1{,}2098$.

Los siguientes prismas se van aproximado a un cubo:

$$l_4 = \frac{2l_3 + h_3}{3} \approx 2{,}3199 \qquad h_4 = \frac{10}{l_4^2} \approx 1{,}8580$$
$$l_5 \approx 2{,}1659 \qquad h_5 \approx 2{,}1316$$
$$l_6 \approx 2{,}1545 \qquad h_6 \approx 2{,}1544$$

El valor de $l_6$ coincide con $\sqrt[3]{10}$ en tres decimales. La fórmula de recurrencia para obtener la raíz cúbica de $a$ es

$$l_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2l_n + \frac{a}{l_n^2}\right)$$

En general, la fórmula de recurrencia para obtener $\sqrt[m]{a}$ es

$$l_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)l_n + \frac{a}{l_n^{m-1}}\right)$$

Observemos que la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, nos dice que $l_{n+1} \leq \sqrt[m]{a}$ para todo $n$. Además los $l_n$ van creciendo con $n$ pues,

$$l_{n+1} = l_n \frac{1}{m}\left(m - 1 + \frac{a}{l_n^m}\right) \geq l_n, \quad n > 1$$

De aquí se deduce que el valor límite de $l_n$ (que llamamos $l$) satisface

$$l = \frac{1}{m}\left(m - 1 + \frac{a}{l^m}\right)$$

de donde $l = \sqrt[m]{a}$.

Calcula $\sqrt[5]{2}$ a partir de $l_1 = 1$ y compara el valor obtenido con el que te entrega tu calculadora.

*Juan Carlos Pedraza*

---

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: inaquide@cueyatl.uam.mx.