FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Boletín de FICOM

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

Boletín N.º 8 Enero, 2001.

Las matemáticas de los incas

Cuando los españoles llegaron a ciertas partes de Sudamérica encontraron grupos que usaban unas cuerdas curiosas en sus actividades. El grupo más grande de ellos tiene el nombre de *Incas*, y vamos a ver algunos aspectos de sus matemáticas.

Antes de empezar, tenemos que definir el término *Incas*. El grupo cultural que se llama los Incas representa una colección de varias culturas que tenían el mismo gobierno, la misma economía y hablaban el mismo idioma. En su apogeo de 1400 hasta 1560 (DC), ocupaban un territorio enorme que incluía la mayoría del Perú, y partes grandes de Ecuador, Bolivia, Chile y Argentina.

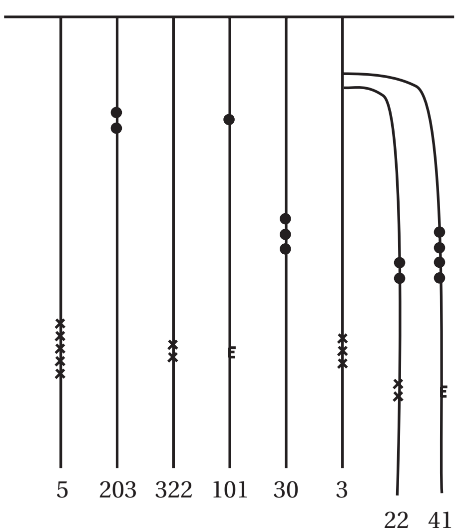
Para estudiar las matemáticas de los Incas, nos ayudará describir unos factores que afectaron su desarollo matemático. Primero, nos preguntaremos: ¿Qué cosas motivan a un grupo a desarollar matemáticas? Seguramente es más que la curiosidad por los números. Cualquier grupo tendría muchos motivos para usar matemáticas, dependiendo de lo que ese grupo vea como importante. En el caso de los Incas, un aspecto importante es la geografía. La mayoría de la región en donde habitaban es desertica o montañosa. Así para sobrevivir era crítico saber como obtener y controlar el agua. Los Incas tenían sistemas avanzados de irrigación y acueductos. Claramente, para tales sistemas hay que saber bastante de matemáticas. Otro aspecto importante es la manera en que gobernaban los Incas. El grupo original de los Incas tenía su captial en Cuzco (Perú), y de allí impartían reglas complicadas de impuestos a todo el territorio. También para ese sistema se necesitaban las matemáticas. Otro factor fué la astronomía. Los Incas, como muchos grupos, estudiaban el cielo para medir con precisión el tiempo, hacer sus calendarios, y en particular saber las estaciones del año para cultivar.

El arte de los Incas, era (y todavia es) muy simétrico, lo que nos dice que era un grupo ordenado; es decir, los Incas preferían las cosas bien organizadas y ordenadas.

Vale la pena mencionar que hubo otros grupos que poco a poco formaron parte de los Incas. Esos grupos afectaron a los Incas en sus matemáticas en el sentido que los Incas frecuente-mente usaban las ideas de esos grupos. Leyendo la historia de los Incas, el lector verá que algunos grupos son: Los Moche, los Aymara, y los Nazca.

Después de analizar brevemente el contexto cultural de los Incas, podemos ahora hablar de sus matemáticas. Inicialmente indicamos que los Inca usaban un sistema de nudos amarrados en cuerdas. Esas colecciones de cuerdas con nudos se llamaban *quipus* (también se puede escribir 'khipu'). El proceso de hacer un quipu era primero hacer la estructura y después llenarlo con nudos. Una vez poniendo los nudos en un quipu, ya no se desamarraban, lo que implica que el quipu no se usaba para contar. En otras palabras, el quipu no era ni un ábaco ni una calculadora. En realidad, el quipu era algo similar a una página electrónica de las usamos en las computadoras hoy en día, de tal manera que primero decidimos cómo queremos la estructura y después la llenamos con datos particulares. La estructura de cada cuerda era como sigue: Habían tres tipos de nudos, de figura ocho, un nudo simple, y un nudo de varias vueltas. El nudo de figura ocho representaba el número uno. Los simples eran potencias o multiples de diez, y los de vueltas representaban valores entre 2 y 9. Es decir, un nudo de siete vueltas representaba el número 7. Los nudos empezaban de la parte baja de la cuerda y se contaban hacía arriba. Un espacio grande entre dos nudos de multiples de diez representaba un cambio de potencia. Por ejemplo, tres nudos simples cerca de la parte baja de la cuerda sería treinta, pero si uno de esos nudos está más arriba, entonces sería ciento veinte. En el ejemplo se ven varias posibilidades de la numeración de los quipus:

Ejemplo:



Un quipu.

¿Qué podemos deducir de los quipus sobre las matemáticas de los Incas? Primero, podemos ver que contaban en base de 10, como nosotros contamos hoy en día. Segundo, observemos que su sistema era *posicional*; es decir, posiciones distintas de los nudos determinan potencias distintas de 10. Además, podemos ver que sería fácil representar el valor de cero con un quipu, por medio de dejar un espacio entre potencias de 10 (y los Incas sí conocían el cero). Esa es la situación cuando escribimos '408' en el sentido que '0' representa un espacio para indicar que '4' representa cuatrocientos y no cuarenta.

Un aspecto curioso de los quipu que usaban los Incas para recordar datos más complicados era el uso de colores. Ellos usaban colores distintos para representar tipos de datos distintos. Por ejemplo, en un quipu que representa la cosecha de un campesino, este podía usar cuerdas rojas para cantidades de papas, cuerdas amarillas para cantidades de trigo, etc. En términos modernos, podemos imaginar esta situación como si usaramos la letra 'x' de color azul si x es un número real y 'x' de color verde si x es un vector en $\mathbb{R}^n$.

En resumen, podemos ver que los quipu tenían mucha variedad de estructura y se usaban en distintas situaciones. Resulta que los Inca usaban los quipus para recordar cantidades enormes de datos. Existen quipus que tienen miles de cuerdas, y además, con cuerdas amarradas a otras cuerdas para tener una estructura que matemáticamente sería como la estructura que se llama un *árbol* en la teoría de gráficas.

Si le interesa al lector este tema de los Incas y sus matemáticas, hay varias referencias en donde hay descripciones más detalladas. Además, se puede ver que aún hoy en día hay cosas que se están descubriendo sobre los Incas y sus matemáticas. Por ejemplo, en el artículo de Darrell Gundrum, él describe que una tela antigua de los Incas, donde aparecen figuras extrañas, no es simplemente una decoración de arte sino que acaba de descubrirse que es un calendario.

Tom Gilsdorf

Referencias

[1] Alcina Franch, José y Josefina Palop M.: *Los Incas, el Reino del Sol*, Ediciones Anaya, 1988.

[2] Ascher, Marcia y Robert Ascher: *Mathematics of the Inca: Code of the Quipu*, Dover Publications, 1997.

[3] Closs, Michael: *Native American Mathematics*, University of Texas Press, 1986.

[4] Gundrum, Darrell: Fabric of Time, en *Archaeology*, March/April, 2000, pág. 46-51.

[5] Urton, Gary: *The Social Life of Numbers: A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic*, University of Texas Press, 1997.

Sobre um teorema de Schur

Dado el carácter iberoamericano de este boletín hemos decidido escribir este artículo en portugués. Presentamos aquí la solución a un problema interesante. La técnica usada, adaptada a la situación específica de este problema, puede servir para resolver otros problemas de este mismo tipo.

Dados 69 números naturais, dois a dois distintos, estritamente positivos e menores do que ou iguais a 100, mostre que existem 4 deles, a, b, c e d, com $a < b < c$ e $a + b + c = d$. E se forem dados 68 números, a propriedade continua valendo?

Solução

Livre é o nome que se dá a uma seqüência estritamente crescente $a(i)$ (de números naturais, estritamente positivos) tal que não existam 4 índices $i < j < k < l$ tais que $a(i) + a(j) + a(k) = a(l)$.

Exemplo: $a(1) = n$, $a(2) = n + 1$, $a(3) = n + 2$, $\ldots$, $a(2n + 3) = 3n + 2$. Queremos provar que, em toda seqüência livre, $a(2n + 3) \geq 3n + 2$, e que $a(2n + 3) = 3n + 2 \Rightarrow a(1) = n$.

Seja p o menor natural para o qual isto falha.

Temos,

$$\begin{aligned} a(2(p-1)+3) &\geq 3(p-1)+2, \\ a(2p+3) &= 3p+1, \\ a(2p+2) &= 3p, \\ &\vdots \\ a(3) &= p+1, \\ a(2) &= p, \\ a(1) &= p-1 \quad \text{e} \\ a(1)+a(2)+a(3) &= a(2p+2) \quad \text{absurdo.} \end{aligned}$$

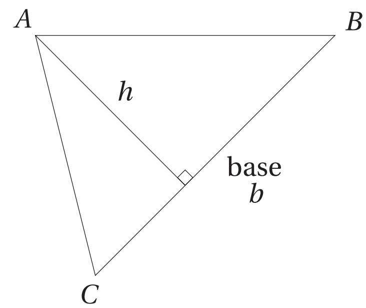
Em particular, $a(69) = 101 > 100$.

Para a 2.ª parte, $\{32, 34, 35, ..., 100\}$ nos dá o contraexemplo "minimal".

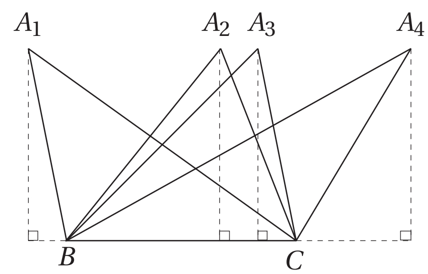
Angelo Barone – Cecilia Braghini

Los invariantes al rescate

Introducción Es bien conocido que para calcular la superficie de un triángulo se multiplica la altura por la base y se divide entre dos; usando los datos de la figura se tiene que el área de ABC es $\dfrac{bh}{2}$.



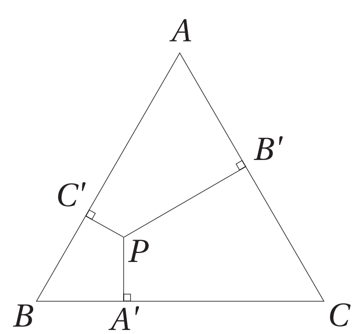
En la siguiente figura nos damos cuenta que todos los triángulos tienen la misma superficie ya que tienen todos la misma base y la misma altura.



Apliquemos esta propiedad a los dos problemas siguientes.

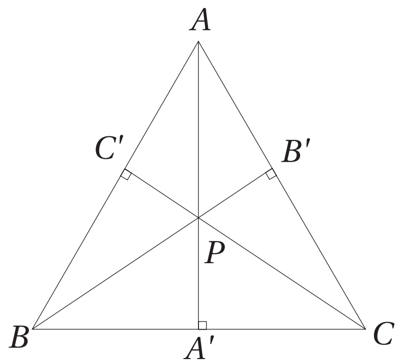
Suma inesperada Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto cualquiera en su interior. Sean A', B' y C' las proyecciones de P sobre BC, AC y AB respectivamente (ver la figura).

Pruebe que la suma $PA' + PB' + PC'$ es independiente de la posición de P.



El problema estará resuelto si encontramos un valor de esa suma que sea independiente del lugar en el que se coloque P. Probaremos que la suma de esas tres longitudes es igual a la longitud de la altura del triángulo, que es equilátero. Esa altura es siempre la misma, no depende del vértice al que corresponde.

Consideremos los siguientes triángulos:



APB: su área es $\dfrac{AB \cdot PC'}{2}$

APC: su área es $\dfrac{AC \cdot PB'}{2}$

BPC: su área es $\dfrac{BC \cdot PA'}{2}$

Observemos que $AB = AC = BC$ y que la suma de las áreas de los triángulos APB, APC y BPC es el área del triángulo ABC.

Si llamamos h a la altura de ABC, tenemos

$$\text{área } ABC = \frac{AB \cdot h}{2}$$

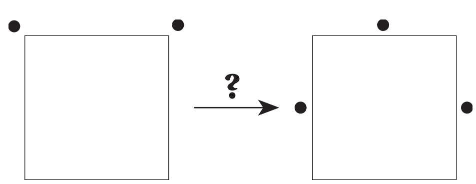
Entonces

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot h}{2} &= \frac{AB \cdot PC'}{2} + \frac{AC \cdot PB'}{2} + \frac{BC \cdot PA'}{2} \\ &= \frac{AB}{2}(PC' + PB' + PA') \end{aligned}$$

de donde $PC' + PB' + PA' = h$.

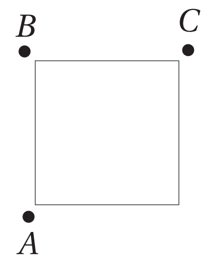
De esta manera tenemos que la suma que se quería calcular es independiente del punto P.

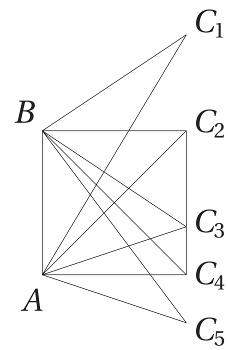
Movimientos de hormiga En cada punto marcado en el cuadrado de la izquierda hay una hormiga. En su turno, cada hormiga se mueve en la dirección determinada por las otras dos. El problema consiste en decidir si pueden llegar a la posición que se indica en la figura siguiente.



(1) (2)

La hormiga C, por ejemplo, sólo se puede mover en la dirección determinada por AB, es decir que puede ocupar cualquiera de las posiciones indicadas con $C_1, C_2, C_3, \ldots$





Es interesante observar que todos los triángulos ABC_i siempre tendrán área igual al área de ABC y por lo tanto independiente de la posición de la hormiga C. Es decir que el área es un invariante respecto a la posición de las hormigas. En la posición inicial el área determinada por las hormigas es la mitad del cuadrado y al moverse con las condiciones indicadas siempre el área que determinan será esa. Sin embargo en la posición final el área que determinan es un cuarto del cuadrado. Entonces, teniendo el área como invariante, no podemos pasar de una posición con área un medio del cuadrado a una con área un cuarto. **Eso es imposible**. No se puede pasar de la situación (1) a la situación (2).

Conclusión En ninguno de los enunciados precedentes se hace referencia explícita al cálculo de áreas. Sin embargo, en ambos problemas el área es el invariante el que permitió resolverlos. A veces para resolver un problema hay que buscar un poco más lejos y no sólo quedarse con lo que salta a la vista.

Carlos Bosch Giral – Bibiana Russo

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: `http://www.missouri.edu/~oc918/ficom`.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: `oc918@mizzou.edu`.