FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Boletín de FICOM

ACADEMIA MEXICANA DE CIENCIAS

Antes **Boletín del Concurso de Primavera para Maestros**

Comité Editorial: *Javier Alfaro, Carlos Bosch, Óscar Chávez, Iñaqui de Olaizola, Alicia Escalera, Marcela González.*

Boletín N.º 9 Febrero, 2001.

Ideas felices en la resolución de problemas

Hace varios años se popularizó entre los participantes de olimpíadas matemáticas la frase *feliz idea* para describir esas ideas que transforman un problema imposible de resolver en una rutina de cuentas simples que cualquiera puede hacer.

Un buen problema de olimpíadas siempre requiere una idea no rutinaria. Pero nunca es imprescindible la feliz idea, porque el tiempo de la pruebas es escaso, y el ganador es el que resuelve correctamente la mayor cantidad de problemas, aunque sus soluciones no sean bellas. Por lo tanto, es sorprendente que surjan estas felices ideas durante una prueba de olimpíadas. Pero ocurre.

Un participante que tomó como costumbre sorprendernos es Fernando Pastawski, nacido en 1982. Aquí mostramos algunas ideas que nos regaló Fernando, elaboradas *en tiempo de prueba*.

Problema 1. (Pretorneo de las Ciudades, 1998) En un tablero de 5×5, del tipo del tablero de ajedrez, se ha colocado el máximo número posible de caballos de modo tal que no haya dos que se amenacen. Demostrar que hay una sola ubicación posible.

1	24	13	18	7
14	19	8	23	12
9	2	25	6	17
20	15	4	11	22
3	10	21	16	5

Solución. Podemos lograr que un caballo pase por el tablero, visitando exactamente una vez cada casilla del tablero de 5×5. Numeramos las casillas siguiendo el recorrido del caballo en un tal paseo.

Formamos la secuencia de las 25 casillas del tablero. $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}$ $C_{16}C_{17}C_{18}C_{19}C_{20}C_{21}C_{22}C_{23}C_{24}C_{25}$. Si dos caballos ocupan casillas consecutivas de la secuencia, se amenazan. Si los caballos no deben amenazarse, el máximo número posible de caballos que se pueden colocar es 13, ocupando los términos impares de esta secuencia.

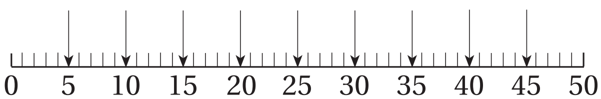
1	24	13	18	7
14	19	8	23	12
9	2	25	6	17
20	15	4	11	22
3	10	21	16	5

Y si esta distribución es buena, es la única posible. La distribución es buena, pues si el tablero se colorea como el de ajedrez, tenemos todos los caballos en casillas del mismo color, y por lo tanto, ninguno amenaza a otro.

Feliz idea 1. Formar la secuencia (con un número impar de términos) de las casillas que recorre el paseo del caballo.

Problema 2. (Olimpíada Matemática Argentina, 1998) La compañía *Cargo Sur* recibió un pedido para transportar varios containers con un peso total de 50 toneladas. Cada container pesa a lo sumo una tonelada, pero no hay información acerca de cuál es la cantidad de containers; no se sabe si los containers son todos iguales ni se sabe cuánto pesa cada uno. La carga total será distribuida en varios camiones, cada uno con capacidad máxima para 5 toneladas, que harán un viaje cada uno. ¿Cuál es el menor número de camiones que debe enviar la compañía para garantizar que toda la carga será transportada como corresponde?

Solución. Representemos a los containers como segmentos que tienen una medida igual a su peso. Si colocamos estos segmentos sobre una línea, uno a continuación del otro, obtenemos un segmento mayor, de medida 50.



Dividimos el segmento mayor en 10 partes iguales, haciendo 9 marcas. Si una marca cae dentro de uno de los segmentos pequeños, separamos ese segmento. De este modo, separamos a lo sumo 9 segmentos. Los containers que corresponden a los segmentos que separamos pueden distribuirse en a lo sumo dos camiones, 5 en uno y 4 en otro. El resto de los containers pueden distribuirse en 10 camiones, el primero con los containers que corresponden a los segmentos ubicados antes de la primera marca, el segundo con los containers que corresponden a los segmentos ubicados entre la primera y la segunda marca, etc. Utilizamos así a lo sumo $2 + 10 = 12$ camiones. Es imposible garantizar el traslado con menos camiones. Por ejemplo, si hay 79 containers que pesan $\frac{50}{79}$ toneladas cada uno, cada camión puede llevar un máximo de 7 containers, pues $8 \cdot \frac{50}{79} > 5$. El número de camiones debe ser un entero mayor o igual que

$$\frac{50}{7 \cdot \frac{50}{79}} = \frac{79}{7} > 11,$$

por lo que son necesarios al menos 12 camiones.

Feliz idea 2. Visualizar los pesos de los containers como una partición de un segmento de longitud 50 y marcar los segmentos de la partición que contienen a los múltiplos de 5, desde 5 hasta 45.

Problema 3. (Cono Sur, 1998) El alcalde de una ciudad desea establecer un sistema de transportes con por lo menos una línea de ómnibus, en el cual:

I. cada línea pase exactamente por tres paradas;

II. cada dos líneas distintas tengan exactamente una parada en común;

III. para cada dos paradas de ómnibus distintas haya exactamente una línea que pase por ambas.

Determinar el número de paradas de ómnibus de la ciudad.

Solución. Llamemos p al número de paradas de ómnibus de la ciudad. Entonces el número de líneas de ómnibus es

$$\frac{\binom{p}{2}}{3} = \frac{p(p-1)}{6}$$

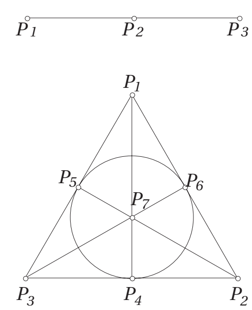
porque hay $\binom{p}{2}$ pares diferentes de paradas, y cada línea une entre sí a tres de estos pares (si las paradas de una línea son A, B, C, entonces esa línea une A y B, A y C, B y C).

Como todo par de líneas tiene una parada en común, si fijamos una de las líneas, todas las demás líneas tienen una parada en común con la línea fijada y dos paradas que no pertenecen a la línea fijada. Hay $p-3$ paradas que no pertenecen a la línea fijada, y se requieren $\binom{p-3}{2} = \frac{(p-3)(p-4)}{2}$ líneas para unir todos los pares de paradas que no están en la línea fijada. No hay más líneas que estas y la fijada inicialmente. Tenemos que si $p \geqslant 3$,

$$\frac{(p-3)(p-4)}{2} + 1 = \frac{p(p-1)}{6}.$$

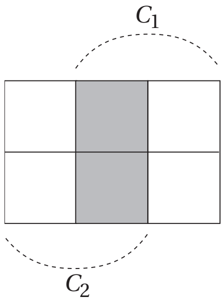
Esta ecuación equivale a $2p^2 - 20p + 42 = 0$, cuyas soluciones son $p = 7$ y $p = 3$. Las dos son posibles.

Si $p = 3$, tenemos una sola línea, con tres paradas. Si $p = 7$, las ponemos en los vértices, los puntos medios de los lados y el centro de un triángulo equilátero. Las líneas son los lados, las alturas y la circunferencia inscripta.



Feliz idea 3. Es usual en este tipo de problemas contar algo de dos maneras diferentes, para sacar conclusiones, pero en este caso consiguió hacerlo las dos veces en función de pares de paradas.

Problema 4. (Rioplatense, 1998) Un tablero cuadriculado de $m \times n$ se ha cubierto completamente con piezas de dominó (rectángulos de tamaño 2×1), que no se solapan ni sobresalen de los bordes del tablero. Se consideran los cuadrados de tamaño 2×2 formados por cuatro casillas del tablero. Se dice que una pieza de dominó sombrea un cuadrado (de tamaño 2×2) si cubre al menos una de sus cuatro casillas. El número de piezas que sombrean cada cuadrado de 2×2 puede ser 2, 3 ó 4. Demostrar que el número de cuadrados sombreados por exactamente dos piezas es mayor que el número de cuadrados sombreados por cuatro piezas.



Solución. Por cada pieza de dominó del cubrimiento, hay al menos dos cuadrados que están sombreados por 2 o por 3 piezas.

En esta cuenta, los cuadrados sombreados por exactamente dos piezas se han contado dos veces cada uno, una por cada dominó que los sombrea, y se han contado cuadrados ficticios, con dos de sus casillas afuera de los límites del tablero.

Llamemos n_2, n_3, n_4 al número de cuadrados sombreados por 2, 3, 4 piezas, respectivamente. Sea e_1 el número de cuadrados sombreados por 2 piezas, que se han contado dos veces, y e_2 el número de cuadrados ficticios que se han contado. El número de piezas de dominó del cubrimiento es $\frac{mn}{2}$, luego $n_2 + n_3 = \frac{mn}{2} \cdot 2 - e_1 - e_2$. Es claro que e_1 es igual a n_2, y e_2 es menor o igual que el número posible de piezas que cubren dos casillas del borde del tablero: $m + n - 2$. Entonces,

$$n_2 + n_3 \geqslant mn - n_2 - (m + n - 2)$$

y tenemos

$$2n_2 + n_3 \geqslant mn - m - n + 2. \qquad (1)$$

Por otro lado, el número total de cuadrados de 2×2 del tablero es $(m-1)(n-1)$, de donde

$$n_2 + n_3 + n_4 = (m-1)(n-1). \qquad (2)$$

Restando (1) y (2) miembro a miembro, resulta

$$n_2 \geqslant n_4 + 1.$$

Feliz idea 4. Asociar a cada dominó dos cuadrados sombreados por dos o tres piezas, sin prestar atención a lo que ocurre con los cuadrados sombreados por cuatro piezas. Una vez más, está presente la idea de contar la misma cosa de dos maneras distintas.

Problema 5. (Torneo de las Ciudades, 1999) En un tablero gigante de ajedrez se han marcado $2n$ casillas de modo que la torre puede llegar a todas las casillas marcadas sin necesidad de pasar por alguna casilla que no esté marcada. Demostrar que la figura formada por las casillas marcadas se puede dividir en n rectángulos.

Solución. Llamamos lado a la frontera entre dos casillas adyacentes, y lado interior a la frontera entre dos casillas marcadas adyacentes. Para que la torre pueda recorrer el conjunto de las casillas marcadas, es necesario que haya al menos $2n - 1$ lados interiores. Cada lado interior puede tener orientación horizontal o vertical. Por el *principio del palomar*, entre los $2n - 1$ lados interiores, hay al menos n con la misma orientación. Sin pérdida de generalidad, supongamos que esa orientación es vertical.

Si trazamos todos los lados y lados interiores del polígono determinado por el conjunto de las casillas marcadas, dividimos al conjunto en $2n$ cuadrados unitarios. Cada vez que quitamos un lado interior vertical, desaparecen dos rectángulos de la forma $1 \times k$ y $1 \times q$, y aparece un nuevo rectángulo de la forma $1 \times (k + q)$. Es importante ver que por este procedimiento sólo se obtienen figuras de la forma $1 \times m$, lo que es cierto inicialmente, con la partición en cuadrados unitarios. Cada vez que quitamos un lado interior vertical, la cantidad de rectángulos se reduce en 1. Al quitar n lados interiores verticales, tendremos n rectángulos.

Feliz idea 5. Tener la osadía de intentar la descomposición utilizando exclusivamente rectángulos horizontales de $1 \times k$.

Patricia Fauring — Flora Gutiérrez

Cilindros con la misma superficie lateral: ¿qué pasa con el volumen?

En estas actividades se estudia cómo se altera el volumen del cilindro al cambiar el radio y la altura mientras se mantiene constante el área de la superficie lateral[1]. En matemáticas es importante aprender a hacer razonamientos acerca de las cantidades involucradas en los problemas, y no solamente operaciones con los números que las representan, para entender mejor la situación. La notación algebraica nos permite ver con mayor claridad la relación entre las cantidades, y entender el porqué de un resultado que a primera vista resulta sorprendente.

Materiales. Hojas de papel tamaño carta, cinta adhesiva, material de empaque o palomitas de maíz, un cartón o superficie plana, calculadora.

Toma una hoja de papel tamaño carta. Llama a a la longitud del lado corto y b a la longitud del lado largo. Forma con la hoja un cilindro uniendo los lados largos del rectángulo. Ahora corta una hoja del mismo tamaño a la mitad (la mitad del lado largo). Extiende los dos rectángulos y pega uno junto al otro, para formar una sola tira rectangular. Con

[1]Este artículo está basado en parte en material presentado por Glenda Lappan en la sesión inaugural de la reunión anual del *National Council of Teachers of Mathematics*, Chicago, abril de 2000.

esta tira de la mitad de alto y doble de largo se forma un cilindro chaparro y ancho (figura 1). El cilindro está formado por la misma cantidad de papel, simplemente pegado de otra forma, por lo que la superficie lateral es igual. En el primer caso la superficie lateral es $a \times b$, y en el segundo caso $2a \times b/2$, de modo que son iguales. Pon el nuevo cilindro alrededor del primero. Llena el cilindro alto de material de empaque o de palomitas de maíz. Al retirar el cilindro alto el contenido se vacía en el otro, y vemos que se llena sólo la mitad del cilindro ancho y chaparro.

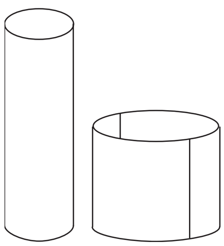


Figura 1. Cilindros con la misma superficie lateral.

¿Por qué se ven iguales? Nuestra percepción visual del tamaño de las cosas está influida fuertemente por la sección transversal que nos presentan. En el caso de los cilindros, cuando están en posición vertical y los vemos desde un lado, la sección transversal está dada por el área de un rectángulo formado por el diámetro del cilindro y la altura. Verifica que las dos secciones transversales son iguales.

¿Por qué son diferentes los volúmenes? El radio del primer cilindro es $\frac{a}{2\pi}$, el área de la base $\frac{a^2}{4\pi}$, la altura es b, y el volumen $\frac{b \times a^2}{4\pi}$. El segundo cilindro tendrá un radio dos veces más grande, $\frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}$, y una altura de la mitad $\frac{b}{2}$. Sin embargo, el área de la base es ahora $\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \times = \frac{a^2}{\pi}$, cuatro veces más grande que para el cilindro anterior, y aunque la altura se redujo a la mitad, el volumen es igual a $\frac{a^2}{\pi} \times \frac{b}{2} = \frac{a^2 \times b}{2\pi}$, dos veces más grande que el anterior.

Repite el proceso de formar un cilindro con la misma superficie lateral pero la mitad de alto. Corta una hoja en cuatro franjas, y pega los cuatro rectángulos para formar una tira de largo $4a$ y altura $b/4$. Forma un nuevo cilindro, y verás que éste tiene un volumen todavía más grande. El nuevo radio será $\frac{2a}{\pi}$ y la altura $\frac{b}{4}$. El área de la base del nuevo cilindro es $\frac{4a^2}{\pi}$, y el volumen $\frac{4a^2}{\pi} \times \frac{b}{4} = \frac{a^2 \times b}{\pi}$, otra vez el doble que el anterior. Vemos así que cada vez que formamos un nuevo cilindro del doble de ancho y la mitad de alto, el volumen se duplica. Podemos organizar la información de manera sistemática en una tabla. La expresión de los volúmenes por medio de letras nos permite ver por qué el volumen se incrementa cada vez por un factor de 2. Así, en principio, con la misma superficie lateral, podemos tener cilindros de volúmenes tan grandes como queramos. Este resultado es sorprendente y fascinante para muchos alumnos. El volumen es una función lineal del radio del cilindro.

lado del rectángulo	altura (rectángulo y cilindro)	radio del cilindro	área de la base	volumen
a	b	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{a^2}{4\pi}$	$V_1 = \frac{a^2 b}{4\pi}$
$2a$	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{\pi}$	$\frac{a^2}{\pi}$	$V_2 = \frac{a^2 b}{2\pi} = 2V_1$
$4a$	$\frac{b}{4}$	$\frac{2a}{\pi}$	$\frac{4a^2}{\pi}$	$V_3 = \frac{a^2 b}{\pi} = 4V_1$
$8a$	$\frac{b}{8}$	$\frac{4a}{\pi}$	$\frac{16a^2}{\pi}$	$V_4 = \frac{2a^2 b}{\pi} = 8V_1$

Tabla 1. Relaciones entre las cantidades.

Nota que en esta actividad trabajamos con cilindros sin tapa. Si bien la superficie lateral se mantiene constante, las tapas que faltan tienen áreas cada vez más grandes conforme el cilindro se hace más chaparro. Un problema muy diferente es estudiar cómo cambia el volumen de los cilindros mientras se mantiene constante toda la superfice exterior del cilindro, esto es, contando la superficie lateral y las dos tapas. En el caso de incluir las dos tapas, el volumen es una función cúbica del radio, pero en este caso sólo se tendrán un intervalo de valores posibles, dentro del cual se alcanza un máximo.

Conclusión. Una ventaja de estas actividades es que los alumnos, sorprendidos por los resultados, muestran interés tanto en la fórmula para el volumen del cilindro, así como el análisis de las cantidades involucradas, y el uso de símbolos algebraicos para estudiar la situación. Es importante que los alumnos aprendan a tratar con las cantidades como objetos matemáticos que tienen interés por sí mismos, y no únicamente como números con los que operamos para obtener un resultado.

Glenda T. Lappan — Alfinio Flores Peñafiel

Puedes encontrar el Boletín de FICOM en Internet: http://www.missouri.edu/~oc918/ficom.

Esperamos tus comentarios y sugerencias sobre este Boletín por correo electrónico a la dirección: oc918@mizzou.edu.